ÇALIŞMA ATÖLYESİ / KONU 03

Vektör fonksiyonları, eğriler ve hareket

Vektörel limit, türev ve integral; yay uzunluğu, Frenet çatısı, eğrilik, hız ve ivme.

Bu bölümün hedefleri

- Vektör fonksiyonunu bileşenlerinden incelemek; eğriyi ve yönünü belirlemek.
- Teğet, normal, binormal ve eğriliği hesaplamak.
- Hız vektörünü süratten ayırmak; ivmeyi teğetsel ve normal bileşenlerine ayırmak.

İçindekiler

1 Vektör değerli fonksiyon ve tanım kümesi 2

2 Limit ve süreklilik bileşenlere ayrılır 2

3 Eğriyi, izini ve yönünü ayırt etmek 3

4 Türev, teğet doğrusu ve çarpım kuralları 4

5 Vektör fonksiyonlarının integrali 5

6 Yay uzunluğu ve yay parametresi 6

7 Frenet çatısı: teğet, normal, binormal 6

8 Eğrilik ve eğrilik yarıçapı 7

9 Hız vektörü, sürat ve ivme 8

10 Fotoğraflardan ek eğri ve türev çözümleri 9

11 İvmenin teğetsel ve normal bileşenleri 10

Kaynaklar ve kapsam 11

1 Vektör değerli fonksiyon ve tanım kümesi

Bir gerçek parametreyi bir vektöre gönderen fonksiyon $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$ biçimindedir. $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ konum vektörünün ucu bir uzay eğrisi çizer. Parametre zaman olabilir; ancak her parametrizasyon fiziksel zaman değildir. Tanım kümesi, üç bileşenin tanım kümelerinin kesişimidir.

Örnek 3.1 | Defterdeki tanım kümesi örneği

$\mathbf{F}(t) = (t+1, \ln(1-t), \sqrt{4-t^2})$ için tanım kümesini bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261009-WA0016.jpg`

Adım adım çözüm

1. İlk bileşen tüm gerçek sayılarda tanımlıdır. Logaritma için $1-t > 0$, yani $t < 1$. Karekök için $-2 \le t \le 2$.
2. Koşulları birlikte sağlamak gerekir: $I = [-2, 1)$. -2 kabul edilir, çünkü kök sıfır olabilir; 1 kabul edilmez, çünkü logaritma argümanı sıfır olamaz.

Vektör fonksiyonlarında toplama, skalerle çarpma, skaler ve vektörel çarpım her t anında uygulanır. Skaler çarpımın çıktısı gerçek sayılı bir fonksiyon; vektörel çarpımın çıktısı yeniden vektör fonksiyonudur.

Örnek 3.2 | Vektör fonksiyonlarıyla işlemler

$\mathbf{F} = (t, t^2, t^3)$, $\mathbf{G} = (1-t, 1+t^2, t)$. Toplamı, skaler ve vektörel çarpımı bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261009-WA0017.jpg`

Adım adım çözüm

1. $\mathbf{F} + \mathbf{G} = (1, 1+2t^2, t^3+t)$.
2. $\mathbf{F} \cdot \mathbf{G} = t(1-t) + t^2(1+t^2) + t^4 = t + 2t^4$.
3. $\mathbf{F} \times \mathbf{G} = (-t^5, t^3 - t^4 - t^2, t + 2t^3 - t^2)$. Her bileşen determinant açılımından gelir.

2 Limit ve süreklilik bileşenlere ayrılır

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = (L_1, L_2, L_3) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim x(t) = L_1,\ \lim y(t) = L_2,\ \lim z(t) = L_3.$$

Bu eşdeğerlik sonlu boyutta normla yakınsamanın koordinat yakınsamasıyla aynı olmasından gelir. Süreklilik için fonksiyonun noktada tanımlı olması, limitin var olması ve limitin o noktadaki değere eşit olması gerekir. Tek bileşendeki bir sıçrama bütün vektör fonksiyonunu süreksiz yapar.

Örnek 3.3 | Defterdeki limit işlemleri

$\mathbf{F}(t) = (\sin t, \cos t, 1+t)$, $\mathbf{G}(t) = (\cos 2t, \sin 3t, e^t+1)$ için t sıfıra giderken skaler ve vektörel çarpım limitlerini bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261009-WA0019.jpg`

Adım adım çözüm

1. $\mathbf{F} \to (0,1,1)$, $\mathbf{G} \to (1,0,2)$.
2. Skaler çarpım limiti $(0,1,1)\cdot(1,0,2) = 2$. Vektörel çarpım limiti $(0,1,1)\times(1,0,2) = (2,1,-1)$.

Örnek 3.4 | Tam kısım içeren süreklilik

$\mathbf{F}(t) = (|t|+1, t\lfloor t\rfloor, 2+t^2)$ fonksiyonu 0 ve 1 noktalarında sürekli midir?

Ders fotoğrafından | `IMG-20261009-WA0019.jpg`

Adım adım çözüm

1. İlk ve üçüncü bileşen her yerde süreklidir. İkinci bileşen 0 yakınında solda $-t$, sağda 0 olur; iki yandan limit 0, değer de 0. Dolayısıyla 0 noktasında süreklidir.
2. 1 yakınında solda ikinci bileşen 0, sağda t olur. Limitler 0 ve 1 olduğundan 1 noktasında süreksizdir.

3 Eğriyi, izini ve yönünü ayırt etmek

Parametrik denklemlerden t yok edilerek eğrinin hangi yüzeylerin üzerinde bulunduğu anlaşılır. Ancak parametreyi yok etmek yönü ve kaç kez dolaşıldığını kaybettirir. Aynı geometrik iz farklı parametrizasyonlarla farklı hızlarda ve ters yönlerde taranabilir.

Örnek 3.5 | Çember ve helis

$\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, 0)$ ile $\mathbf{h}(t) = (\cos t, \sin t, 3t)$ eğrilerini yorumlayınız.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261009-WA0022.jpg`

Adım adım çözüm

1. İlkinde $x^2+y^2=a^2$, $z=0$. $a>0$ ve $0 \le t \le 2\pi$ için pozitif z yönünden bakıldığında çember saat yönünün tersine bir tur taranır.
2. İkincide $x^2+y^2=1$; yükseklik t ile artar. Bir turda t, 2π artar ve yükseklik 6π değişir. Bu eğri bir helistir.

Bir parametrizasyon sürekli, parçalı türevlenebilir olabilir. Düzgünlük için ilgili aralıkta türevin sürekli ve $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ olması istenir. Türevin sıfır olduğu bir parametrizasyon noktasında standart birim teğet formülü doğrudan uygulanmaz; eğrinin geometrisi ayrıca incelenir.

Örnek 3.6 | Parçalı düzgün eğri

$\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a|\sin t|, 0)$, $-2\pi \le t \le 2\pi$, $a > 0$ için düzgünlük nasıldır?

Ders fotoğrafından | `IMG-20261015-WA0038.jpg`

Adım adım çözüm

1. $\sin t$ işaret değiştirdiğinde mutlak değerin türevi değişir. $t = k\pi$ noktalarında tek taraflı teğet vektörler uyuşmaz; verilen parametrizasyon düzgün değildir.
2. Aradaki açık aralıklarda türev vardır ve normu a olur. Dolayısıyla sonlu sayıda parçaya ayrılarak parçalı düzgün kabul edilir. İz üst yarım çemberdir; birden fazla kez taranır.

4 Türev, teğet doğrusu ve çarpım kuralları

$\Delta\mathbf{r}/\Delta t$, iki konum arasındaki kirişin zamana oranıdır. Limitte anlık değişim vektörüne dönüşür. $\mathbf{r}\,'(t_0) \neq \mathbf{0}$ ise bu vektör eğrinin o noktadaki teğet yönüdür. Teğet doğrusu yeni bir parametreyle $\mathbf{q}(s) = \mathbf{r}(t_0) + s\mathbf{r}\,'(t_0)$ olarak yazılır.

$$\mathbf{r}\,'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

$$\begin{aligned} (\phi\mathbf{F})' &= \phi'\mathbf{F} + \phi\mathbf{F}', \\ (\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})' &= \mathbf{F}'\cdot\mathbf{G} + \mathbf{F}\cdot\mathbf{G}', \\ (\mathbf{F}\times\mathbf{G})' &= \mathbf{F}'\times\mathbf{G} + \mathbf{F}\times\mathbf{G}'. \end{aligned}$$

Örnek 3.7 | Dersteki temel türevler

$\mathbf{F}(t) = (t, t^2, t^3)$ ve $\mathbf{G}(t) = (t\ln t - t, e^t, e^{-t})$ türevlerini bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261023-WA0058.jpg`

Adım adım çözüm

1. Bileşenler ayrı türevlenir: $\mathbf{F}' = (1, 2t, 3t^2)$.
2. İkinci fonksiyonun ilk bileşeninde çarpım kuralı $(t\ln t - t)' = \ln t + 1 - 1 = \ln t$ verir. $\mathbf{G}' = (\ln t, e^t, -e^{-t})$, $t > 0$.

Örnek 3.8 | Zincir kuralı içeren vektör türevi

$\mathbf{F}(t) = (\arcsin(4t), -3\arctan(2t-1), 7\ln(3t^2))$ türevini bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261023-WA0058.jpg`

Adım adım çözüm

1. İlk bileşenin türevi $4/\sqrt{1-16t^2}$; ikincinin türevi $-6/[1+(2t-1)^2]$.
2. Üçüncü bileşen $7(6t)/(3t^2) = 14/t$. Türev formüllerinin ortak geçerlilik aralığı $-1/4 <$

$t < 1/4$, $t \neq 0$. Fonksiyon uçlarda tanımlı olsa da bu türevler uçlarda sonlu değildir.

Örnek 3.9 | Tahtadaki özdeşliğin kanıtı

$[\mathbf{F}(t) \times \mathbf{F}\prime(t)]\prime = \mathbf{F}(t) \times \mathbf{F}\prime\prime(t)$ olduğunu gösteriniz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261023-WA0058.jpg`

Adım adım çözüm

1. Çarpım kuralı sol tarafı $\mathbf{F}\prime \times \mathbf{F}\prime + \mathbf{F} \times \mathbf{F}\prime\prime$ yapar.
2. Bir vektörün kendisiyle vektörel çarpımı sıfırdır. İlk terim silinince istenen özdeşlik kalır.

5 Vektör fonksiyonlarının integrali

İntegral de bileşen bileşen hesaplanır. Belirsiz integralde sabit bir vektör $\mathbf{C} = (C_1, C_2, C_3)$ eklenir. Tek bir skaler sabiti bütün bileşenlere zorunlu olarak aynı eklemek genel çözümü daraltır. Başlangıç koşulu varsa üç sabit ayrı ayrı belirlenir.

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b x(t)\,dt, \int_a^b y(t)\,dt, \int_a^b z(t)\,dt \right).$$

Örnek 3.10 | Başlangıç koşullu integral

$\mathbf{r}\prime(t) = (2t, e^{3t}, 4\sin 2t)$, $\mathbf{r}(0) = (2, 1, -2)$. Konumu bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261015-WA0037.jpg`

Adım adım çözüm

1. İntegral $\mathbf{r}(t) = (t^2 + C_1, e^{3t}/3 + C_2, -2\cos 2t + C_3)$.
2. Başlangıçtan $C_1 = 2, C_2 = 2/3, C_3 = 0$. Dolayısıyla $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 2, (e^{3t} + 2)/3, -2\cos 2t)$.

Örnek 3.11 | Dersteki belirli integral üçlüsü

$\int_0^1 (4t^3, 3, 2(t+1))dt$, $\int_1^2 (6 - 6t, 3\sqrt{t}, 4/t^2)dt$ ve $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sin t, 1 + \cos t, \sec^2 t)dt$ hesaplayınız.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261023-WA0058.jpg`

Adım adım çözüm

1. İlkinde ilkel fonksiyon $(t^4, 3t, t^2 + 2t)$. Sonuç $(1, 3, 3)$.
2. İkincide ilkel fonksiyon $(6t - 3t^2, 2t^{3/2}, -4/t)$. Sonuç $(-3, 4\sqrt{2} - 2, 2)$.
3. Üçüncüde sinüs tek fonksiyon olduğundan ilk bileşen 0. İkinci $\pi/2 + \sqrt{2}$, üçüncü $\tan(\pi/4) - \tan(-\pi/4) = 2$.

6 Yay uzunluğu ve yay parametresi

Küçük bir zaman aralığında alınan yol yaklaşık $\|\mathbf{r}'(t)\|dt$ olur. Bu parçaları toplamak integrali verir. Normun integralini almak gerekir; integralin normu genellikle yer değiştirmedir ve yol uzunluğundan küçük olabilir. Eğri tekrar taranırsa integral tekrar gidilen yolu da sayar.

$$L = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|dt, \qquad s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(u)\|du, \qquad \frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\|.$$

Örnek 3.12 | Dersteki 5-12-13 helisi

$\mathbf{r}(t) = (5\cos t, 5\sin t, 12t)$, $0 \le t \le 2\pi$, uzunluğunu bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261015-WA0039.jpg`

Adım adım çözüm

1. $\mathbf{r}' = (-5\sin t, 5\cos t, 12)$; norm $\sqrt{25\sin^2 t + 25\cos^2 t + 144} = 13$.
2. $L = \int_0^{2\pi} 13dt = 26\pi$. Bu aralıkta $s = 13t$ olduğundan yay parametreli biçim $(5\cos(s/13), 5\sin(s/13), 12s/13)$, $0 \le s \le 26\pi$.

7 Frenet çatısı: teğet, normal, binormal

Birim teğet $\mathbf{T}$ hareket yönünü gösterir. $\mathbf{T}$ yön değiştiriyorsa türevi teğete diktir; birimleştirilince asal normal $\mathbf{N}$ elde edilir. $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ eğrinin anlık dönme düzlemine diktir. Bu üçlü sağ elli ortonormal bir çatıdır.

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}, \qquad \mathbf{N} = \frac{\mathbf{T}'}{\|\mathbf{T}'\|}, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}.$$

Geçerlilik koşulu

$\mathbf{T}$ için hız sıfır olmamalıdır. $\mathbf{N}$ ve $\mathbf{B}$ için ayrıca eğrilik sıfır olmamalıdır. Düz bir doğruda normal ve binormal bu formüllerle tek olarak belirlenmez.

Örnek 3.13 | Çemberin Frenet çatısı

$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ için $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ nedir?

Ders fotoğrafından | `IMG-20261015-WA0034.jpg`

Adım adım çözüm

1. $\mathbf{r}' = (-\sin t, \cos t, 0)$ normu 1 olduğundan $\mathbf{T} = (-\sin t, \cos t, 0)$.
2. $\mathbf{T}' = (-\cos t, -\sin t, 0)$ normu da 1: $\mathbf{N} = (-\cos t, -\sin t, 0)$.
3. Çarpım $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$. Normal merkeze yönelir; binormal sabittir.

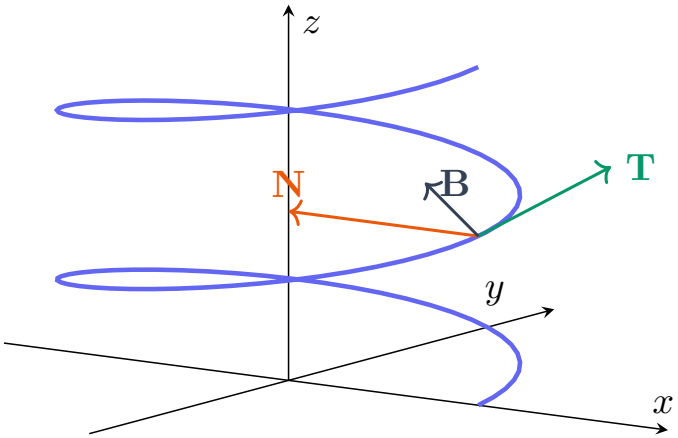
Örnek 3.14 | Dersteki uzay eğrisinin Frenet üçlüsü

$\mathbf{r}(t) = (e^{t}, e^{-t}, \sqrt{2}\,t)$ için $t = 0$ anındaki çatıyı bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261015-WA0040.jpg`

Adım adım çözüm

1. $\mathbf{v}(0) = (1, -1, \sqrt{2})$, normu 2; $\mathbf{a}(0) = (1, 1, 0)$. Dolayısıyla $\mathbf{T}(0) = (1, -1, \sqrt{2})/2$.
2. $\mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{a}(0) = 0$, süratin türevi o anda 0. $\mathbf{T}'(0) = \mathbf{a}(0)/2$; normu $1/\sqrt{2}$. Böylece $\mathbf{N}(0) = (1, 1, 0)/\sqrt{2}$.
3. $\mathbf{B}(0) = (-1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$. Üç vektörün normları 1 ve ikili skaler çarpımları sıfırdır.



Uzay eğrisi üzerinde T teğet, N merkeze dönme yönü, B ise ikisine dik yönü gösterir.

8 Eğrilik ve eğrilik yarıçapı

Eğrilik, birim uzunluk başına teğet yönünün ne kadar değiştiğidir. Parametre daha hızlı ilerlediği için teğet daha hızlı değişebilir; bunu fiziksel hızdan ayırmak için $d\mathbf{T}/dt$, ds/dt ile bölünür. Bir çemberde eğrilik yarıçapın tersidir.

$$\kappa = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^{3}}, \qquad \rho = \frac{1}{\kappa}.$$

Düzlemde $y = f(x)$ grafiği için $\mathbf{r}(x) = (x, f(x), 0)$ seçilirse $\kappa = |f''(x)|/[1 + (f'(x))^{2}]^{3/2}$. Mutlak değer eğriliğin negatif olmamasını sağlar. Birim yay uzunluğuyla parametrelendirilmiş eğride $\|d\mathbf{r}/ds\| = 1$ ve $\kappa = \|d^{2}\mathbf{r}/ds^{2}\|$.

Örnek 3.15 | Genel helisin eğriliği

$\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a > 0$, için eğrilik nedir?

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. $\|\mathbf{r}'\| = \sqrt{a^2+b^2}$. $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = (ab\sin t, -ab\cos t, a^2)$, normu $a\sqrt{a^2+b^2}$.
2. $\kappa = a/(a^2+b^2)$, $\rho = (a^2+b^2)/a$. $b = 0$ olursa çember sonucu $1/a$ elde edilir.

Ek bilgi: eğrinin uzayda dönme düzleminin değişimini burulma ölçer. Yeterince türevlenebilir ve $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' \neq 0$ iken $\tau = [(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}''']/\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2$. Bu müfredatta temel hedef eğriliktir; burulma tamamlayıcıdır.

9 Hız vektörü, sürat ve ivme

Hız $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$ vektördür; sürat $v = \|\mathbf{v}\|$ sayıdır. İvme $\mathbf{a} = \mathbf{v}'$, hem süratin hem yönün değişmesini içerir. Sabit sürat sıfır ivme demek değildir: çembersel harekette yön değişir. $\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = \tfrac{1}{2}(v^2)'$ olduğundan hız ve ivmenin dikliği o anda süratin türevinin sıfır olmasıyla ilişkilidir.

Örnek 3.16 | Tahtadaki hareket örneği

$\mathbf{r}(t) = (5\cos t, 5\sin t, 6t^2)$. Hız, ivme ve bunların dik olduğu anı bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261015-WA0036.jpg`

Adım adım çözüm

1. $\mathbf{v} = (-5\sin t, 5\cos t, 12t)$, $\mathbf{a} = (-5\cos t, -5\sin t, 12)$.
2. $\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = 25\sin t\cos t - 25\sin t\cos t + 144t = 144t$. Yalnızca $t = 0$ anında diktirler.

Örnek 3.17 | Üstel ve trigonometrik hareket

$\mathbf{r}(t) = (e^{-t}, 2\cos 3t, 2\sin 3t)$. $t = 0$ anında hız, ivme büyüklükleri ve birim teğeti bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261015-WA0036.jpg`

Adım adım çözüm

1. $\mathbf{v} = (-e^{-t}, -6\sin 3t, 6\cos 3t)$, $\mathbf{a} = (e^{-t}, -18\cos 3t, -18\sin 3t)$.
2. $\mathbf{v}(0) = (-1, 0, 6)$, $\|\mathbf{v}(0)\| = \sqrt{37}$; $\mathbf{a}(0) = (1, -18, 0)$, $\|\mathbf{a}(0)\| = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}$.
3. $\mathbf{T}(0) = (-1, 0, 6)/\sqrt{37}$. Vektörü büyüklüğüyle karıştırmamak için sonucun türünü kontrol et.

10 Fotoğraflardan ek eğri ve türev çözümleri

Örnek 3.18 | Parametrik eğrinin türü

$\mathbf{r}(t) = (2+3t, 4+5t, 6+4t)$ eğrisinin türünü bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261009-WA0021.jpg`

Adım adım çözüm

1. $\mathbf{r}(t) = (2,4,6) + t(3,5,4)$; sabit doğrultuda bir doğrudur.
2. Simetrik biçim $(x-2)/3 = (y-4)/5 = (z-6)/4$.

Örnek 3.19 | Kapalı eğri ve uç teğetler

$\mathbf{r}(t) = (t^2-4, t^3-4t, 0)$, $-2 \le t \le 2$. Basit ve kapalı mıdır?

Ders fotoğrafından | `IMG-20261009-WA0025.jpg`

Adım adım çözüm

1. Her iki uç (0,0,0) olur. Farklı t ve s için eşit ilk koordinatlar s =-t gerektirir; ikinci koordinat eşitliği $2t(t^2-4)=0$ verir.
2. Farklı parametrelerle tek tekrar uçlarda t =2 ve s =-2 dir; t =0 kendi kendine aynı parametredir. Dolayısıyla basit kapalı eğridir.
3. $\mathbf{r}' = (-4,8,0)$ ve (4,8,0) uçlarda paralel değildir; kapama noktasında köşe vardır. Verilen parametrizasyon parçalı düzgün kapalı eğri olarak ele alınır.

Örnek 3.20 | Türev ve ikinci türevin noktadaki değeri

$\mathbf{r}(t) = (1-\cos t, \sin t, t)$ için $t = \pi/2$ anındaki ilk iki türevi bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261009-WA0024.jpg`

Adım adım çözüm

1. $\mathbf{r}' = (\sin t, \cos t, 1)$, $\mathbf{r}'' = (\cos t, -\sin t, 0)$.
2. Noktadaki değerler (1,0,1) ve (0,-1,0). Teğet noktası $(1, 1, \pi/2)$, teğet doğrusu bu noktadan (1,0,1) yönünde geçer.

Örnek 3.21 | Vektörel çarpımın türevini iki yoldan almak

$\mathbf{U} = (t, -t, t^2/2)$, $\mathbf{V} = (t^4/4, t^3/3, t^2/2)$. Çarpımın türevini bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261009-WA0024.jpg`

Adım adım çözüm

1. Önce çarpım: $\mathbf{U} \times \mathbf{V} = (-t^3/2 - t^5/6, t^6/8 - t^3/2, t^4/3 + t^5/4)$.
2. Türev $(-3t^2/2 - 5t^4/6, 3t^5/4 - 3t^2/2, 4t^3/3 + 5t^4/4)$.

3. Alternatif $\mathbf{U}' \times \mathbf{V} + \mathbf{U} \times \mathbf{V}'$ aynı sonucu verir. Orta bileşenin t altıncı kuvvetinin türevi $6t^5/8 = 3t^5/4$; defterdeki bu satır sadeleştirilerek kontrol edildi.

Örnek 3.22 | Sabit normun türevi

$\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, 0)$, a>0, için hızın konuma dik olduğunu kanıtlayınız.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261015-WA0036.jpg`

Adım adım çözüm

1. $\mathbf{r}' = (-a\sin t, a\cos t, 0)$; konumla çarpım $-a^2\sin t\cos t + a^2\sin t\cos t = 0$.
2. Genel gerekçe: $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = a^2$ sabit olduğundan türevi $2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' = 0$.

11 İvmenin teğetsel ve normal bileşenleri

$\mathbf{v} = v\mathbf{T}$ ifadesinin türevi alınırsa ivmenin bir kısmı sürati, diğer kısmı yönü değiştirir. Normal bileşen, eğriliğin ve süratin karesinin çarpımıdır. Teğetsel katsayı negatif olabilir; normal katsayı negatif değildir.

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \kappa v^2\mathbf{N}, \qquad a_T = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|}, \qquad a_N = \frac{\|\mathbf{v}\times\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|}.$$

Örnek 3.23 | Dairesel harekette ivme

$\mathbf{r}(t) = (a\cos\omega t, a\sin\omega t, 0)$, $a>0, \omega\neq 0$ için a_T, a_N nedir?

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. Sürat $a|\omega|$ sabit olduğundan $a_T = 0$. Eğrilik $1/a$.
2. $a_N = (1/a)(a^2\omega^2) = a\omega^2$. İvme tamamen içeriye yönelir; sürat sabit olmasına rağmen sıfır değildir.

1. Önce türevlerle hız ve ivmeyi bul; sonra norm al.
2. Frenet çatısı istenirse her vektörün birim ve diğerlerine dik olduğunu kontrol et.
3. Yay uzunluğunda integralin içine norm, eğrilikte normun küpünü yaz.
4. Normal ve binormal için sıfır eğrilik olasılığını kontrol et.

Kaynaklar ve kapsam

Bu metin 156 ders/defter fotoğrafı ve altı başlıklı müfredata göre özgün olarak yazıldı. Fotoğraflar dersin sıra ve örneklerini belirler. Ek sorular pekiştirme olarak etiketlidir; çıkmış sınav sorusu iddiası yoktur. Soluk semboller tahminle aktarılmadı. Gradyan ve yönlü türev, müfredat gereği tamamlanan anlatımdır. Fotoğraf bazında inceleme dizini web sitesinde ve analysis/FOTOGRAF_INCELEMESI.md dosyasında bulunur. **Birincil ders malzemesi**. Kullanıcının sağladığı 156 JPG ders/defter fotoğrafı ve mufredat.png. Dosya tarihleri ders tarihi olarak varsayılmadı. Konu-fotoğraf eşleştirmesi fotoğraf dizinindedir.

Erwin Kreyszig · Advanced Engineering Mathematics. Dersin belirtilen kitabı. Wiley 10. baskı bölüm diziniyle vektör diferansiyel hesabı başlığı eşleştirildi; tam kitap dosyası sağlanmadı. Kitaptan birebir metin veya soru aktarımı yapılmadı. `https://bcs.wiley.com/he-bcs/Books?action=contents&bcsId=6140&itemId=0470458364`

KOCW · Kreyszig temelli Bölüm 9 ders notları. Sungkyunkwan / Kim Munhyeon, vektörler ve vektör fonksiyonları. Açık üniversite notu kavram ve formül kontrolünde kullanıldı. Buradaki Türkçe açıklamalar ve çözümler özgün olarak yazıldı. `https://contents.kocw.net/KOCW/document/2015/sungkyunkwan/kimmunhyeon3/8.pdf`

Zill ve Wright · Calculus / Matematik. Kullanıcının verdiği bibliyografya: İ. N. Cangül çevirisi, Nobel, 2013. Tam metne erişilmedi; baskıya özgü sayfa ve soru numarası atfedilmedi.

Mustafa Balcı · Genel Matematik II. Kullanıcının verdiği bibliyografya: Sürat, 2013. Tam metin sağlanmadı; bu kitaptan doğrulanmış alıntı veya sayfa atfı yapılmadı.

MIT OCW · 18.02 ders notları. Denis Auroux, 2007. Ders düzeni ve kavram denetimi için açık ders dizini. Müfredat dışındaki çok katlı integraller ve integral teoremleri bu çalışmaya eklenmedi. `https://ocw.mit.edu/courses/18-02-multivariable-calculus-fall-2007/pages/lecture-notes/`

MIT · Teğet düzlem ve gradyan. Gradyanın teğet düzlem ve yönlü türevle ilişkisi için açık teknik kontrol kaynağı. Konuya eklenen örnekler özgün pekiştirme sorularıdır. `https://www.ocw.mit.edu/ans7870/18/18.013a/textbook/HTML/chapter06/section05.html`