ÇALIŞMA ATÖLYESİ / KONU 04

Çok değişkenli fonksiyonlar, limit ve süreklilik

Tanım bölgeleri, seviye eğrileri, komşuluklar, yol testi ve sıkıştırma ile limit.

Bu bölümün hedefleri

- Tanım kümesini eşitsizliklerle ve bir çizimle ifade etmek.
- Limitin yokluğunu iki yolla göstermek; varlığını tüm yollar için kanıtlamak.
- Parçalı tanımlı bir fonksiyonun sürekliliğini incelemek.

İçindekiler

1 Birden fazla girdiye sahip fonksiyon 2

2 Dersteki tanım bölgesi örnekleri 2

3 Seviye eğrileri ve seviye yüzeyleri 3

4 Komşuluk ve limitin tam anlamı 4

5 Süreklilik ve doğrudan yerine koyma 4

6 Belirsizlikte cebir ve standart limitler 5

7 İki farklı yolla limitin yokluğu 6

8 Kutupsal koordinatlar ve sıkıştırma 7

9 Limit için uygulanabilir karar sırası 7

Kaynaklar ve kapsam 9

1 Birden fazla girdiye sahip fonksiyon

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her (x, y) noktasına bir sayı atar. Grafik $z = f(x, y)$ uzayda bir yüzeydir; tanım kümesi ise xy düzlemindedir. Örneğin $A(a, h) = ah/2$ üçgen alanı iki değişkenlidir; $V(x, y, h) = xyh$ kutu hacmi üç değişkenlidir. Üç değişkenli skaler fonksiyonun grafiği dört boyutlu olur; seviye yüzeyleriyle görselleştirilir.

Tanım kümesi D, fonksiyonun gerçek değer almasını sağlayan bütün girdilerdir. Görüntü kümesi $f(D)$ ise gerçekten ulaşılabilen çıktılardır. Bir ifadede birden fazla kısıt varsa hepsi aynı anda sağlanmalıdır.

1. Karekök içi en az 0 olmalı.
2. Logaritma içi kesinlikle pozitif olmalı.
3. Payda sıfır olamaz.
4. $\arcsin u$ ve $\arccos u$ için $-1 \le u \le 1$.

2 Dersteki tanım bölgesi örnekleri

Örnek 4.1 | Disk ve eğik şerit

$f(x, y) = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$ ve $g(x, y) = \arccos(x - y)$ için tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261015-WA0041.jpg`

Adım adım çözüm

1. İlkinde $x^2 + y^2 \le 64$: merkezi orijin, yarıçapı 8 olan kapalı disk. Çıktılar $[0, 8]$; grafik üst yarım küredir.
2. İkincide $-1 \le x - y \le 1$, yani $x - 1 \le y \le x + 1$. Sınır doğruları dahil bir şerit. Görüntü $[0, \pi]$.

Örnek 4.2 | Kök ve logaritmayı birlikte ele almak

$f(x, y) = \sqrt{xy} + \log(1 - x^2 - y^2)$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261015-WA0042.jpg`

Adım adım çözüm

1. $xy \ge 0$ ve $x^2 + y^2 < 1$ birlikte gerekli.
2. Bölge açık birim diskin birinci ve üçüncü bölgelerde kalan parçaları ile disk içindeki eksen parçalarıdır. Eksenler dahildir; çember dahil değildir.

Örnek 4.3 | İşaret ayırımı gerektiren kök

$f(x,y)=\sqrt{xy-x^4}+xy$ ve $g(x,y)=\sqrt{x^2-y}+x^2+y^2+1$ tanım bölgelerini bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261022-WA0053.jpg`

Adım adım çözüm

1. İlkinde $x(y-x^3)\geq 0$. $x>0$ iken $y\geq x^3$, $x<0$ iken $y\leq x^3$; $x=0$ iken her y geçerlidir. Sonuç $\{x>0, y\geq x^3\}\cup\{x<0, y\leq x^3\}\cup\{x=0\}$.
2. İkincide $y\leq x^2$. Parabol ve altı dahildir. İlk soruda x ile bölmeden önce x işareti ayrılmazsa bölgenin yarısı kaybolur.

Örnek 4.4 | Her yerde tanımlı logaritma

$\ln(x^2+y^2+4)$ için tanım kümesi nedir?

Ders fotoğrafından | `IMG-20261022-WA0053.jpg`

Adım adım çözüm

1. $x^2+y^2+4\geq 4>0$ her noktada doğrudur. Dolayısıyla tanım kümesi $\mathbb{R}^2$.
2. Logaritma artan olduğundan görüntü kümesi $[\ln 4,\infty)$.

3 Seviye eğrileri ve seviye yüzeyleri

$f(x,y)=c$ denklemi aynı fonksiyon değerine sahip girdileri birleştirir. Haritadaki eş yükseklik eğrileri buna örnektir. Seviye eğrisi xy düzlemindedir; yüzey üzerinde $z=c$ kesitinin düzleme izdüşümü olarak düşünülebilir. $F(x,y,z)=c$ ise üç boyutlu uzayda bir seviye yüzeyidir.

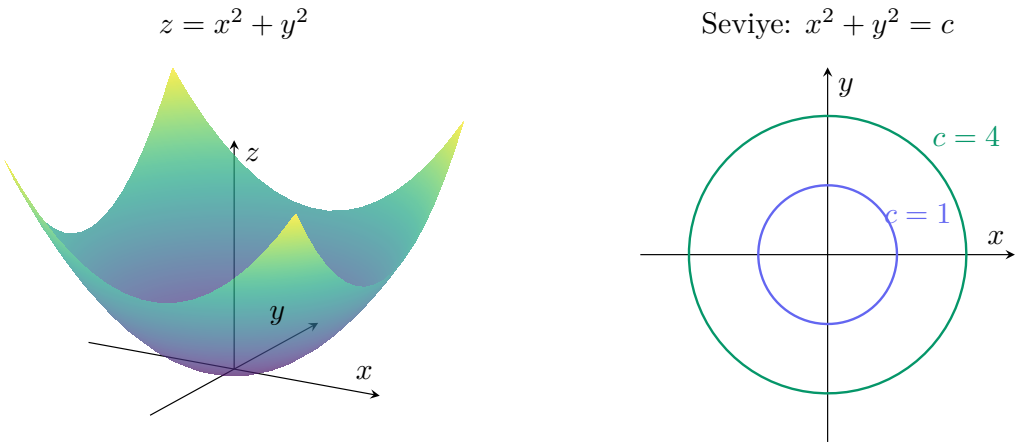
Örnek 4.5 | Paraboloidin seviye eğrileri

$f(x,y)=x^2+y^2$ için $c=0,1,4$ seviyelerini bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261015-WA0042.jpg`

Adım adım çözüm

1. $c=0$ için yalnızca orijin, $c=1$ için yarıçapı 1 çember, $c=4$ için yarıçapı 2 çember vardır.
2. $c<0$ için seviye kümesi boştur. Yüzey $z=x^2+y^2$ yukarı açılan paraboloiddir.



Aynı yüzey hem üç boyutlu grafik hem iki boyutlu seviye eğrileriyle okunabilir.

4 Komşuluk ve limitin tam anlamı

(a, b) merkezli, yarıçapı δ olan açık disk bir komşuluktur. Limit tanımında merkez nokta dışarıda bırakılır. Yaklaşım yalnızca tanım kümesindeki noktalardan yapılır. (a, b), bu kümenin bir yığılma noktası olmalıdır.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \implies |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

Burada tek bir δ, izin verilen bütün yaklaşım yönlerini aynı anda kontrol etmelidir. Bu nedenle iki eksen üzerinde aynı sonucu bulmak limitin varlığını kanıtlamaz. Buna karşılık iki farklı yol üzerinde farklı sonuç bulmak limitin yokluğunu kanıtlamaya yeter.

Doğru testi tek başına yeterli değildir

Bütün $y = mx$ doğruları aynı sonucu verse bile bir parabolda başka sonuç çıkabilir. Varlık için süreklilik, cebirsel dönüşüm veya tüm yönler için geçerli bir üst sınır kullan.

5 Süreklilik ve doğrudan yerine koyma

Bir fonksiyon noktada tanımlıysa ve limiti değerine eşitse o noktada süreklidir. Polinomlar her yerde, rasyonel fonksiyonlar paydaları sıfır olmayan yerde süreklidir. Sürekli fonksiyonların uygun bileşkeleri de süreklidir. Bu kurallar uygunsa en kısa çözüm doğrudan yerine koymaktır.

Örnek 4.6 | Polinom limiti

$P(x,y)=5x^2y^2+4xy^3-8xy^2+3$ için $(x,y)\to(1,2)$ limitini bulunuz.

Ders fotoğrafından | IMG-20261022-WA0053.jpg

Adım adım çözüm

1. Polinom her yerde süreklidir; limit $P(1,2)$.
2. $5\cdot1\cdot4+4\cdot1\cdot8-8\cdot1\cdot4+3=20+32-32+3=23$.

Örnek 4.7 | Dersin kısa limitleri

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(2x^2+y^2+1)/(x^2+y^2+3)$, $\lim_{(x,y)\to(0,\ln 2)}e^{x-y}$, $\lim_{(x,y)\to(1,0)}x\sin y/(x^2+1)$ nedir?

Ders fotoğrafından | IMG-20261022-WA0053.jpg

Adım adım çözüm

1. İlk payda 3 olur; limit $1/3$.
2. İkinci ifade süreklidir: $e^{-\ln 2}=1/2$.
3. Üçüncü payda 2 ve sinüs sıfır olur; limit 0.

6 Belirsizlikte cebir ve standart limitler

Örnek 4.8 | Eşlenikle sadeleştirme

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}[2-\sqrt{xy+4}]/(xy)$ hesaplayınız.

Ders fotoğrafından | IMG-20261022-WA0053.jpg

Adım adım çözüm

1. İfade kendi tanım kümesinde $xy\neq0$ koşuluyla incelenir. Eşlenikle çarpınca pay $4-(xy+4)=-xy$.
2. Yakında $-1/[2+\sqrt{xy+4}]$ ile aynı olur. Bu sürekli ifadenin limiti $-1/4$. Fonksiyonun eksenlerde tanımsız olması limit almayı engellemez.

Örnek 4.9 | Sinüs içeren limitler

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin(xy)/x$ ve $\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^y \sin x/x$ hesaplayınız.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261022-WA0056.jpg`

Adım adım çözüm

1. İlk ifade, uygun noktalarda $y[\sin(xy)/(xy)]$ olur. Standart $\sin u/u \to 1$ limiti ve $y \to 0$ ile sonuç 0. Doğrudan $|\sin(xy)/x| \le |y|$ sınırı da aynı sonucu verir.
2. İkincide $e^y \to 1$ ve $\sin x/x \to 1$; sonuç 1. Her iki limitte yaklaşım fonksiyonun tanımlı olduğu noktalar üzerindendir.

7 İki farklı yolla limitin yokluğu

Örnek 4.10 | Doğruya bağlı sonuç

$f(x,y) = 2xy/(x^2+y^2)$ için orijindeki limiti inceleyiniz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261022-WA0058.jpg`

Adım adım çözüm

1. $y = 0$ yolunda değer 0; $y = x$ yolunda, $x \neq 0$ için değer 1.
2. İki yol aynı noktaya gider fakat sonuçlar farklıdır. Dolayısıyla limit yoktur. Genel $y = mx$ yolunda $2m/(1+m^2)$ çıkar.

Örnek 4.11 | Parabol yoluyla limitin yokluğu

$f(x,y) = (x^4-y^2)/(x^4+y^2)$ için orijindeki limiti inceleyiniz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261022-WA0056.jpg`

Adım adım çözüm

1. $y = 0$ boyunca değer 1; $y = x^2$ boyunca değer 0. İki sonuç farklı, limit yok.
2. Genel $y = ax^2$ yolunda $(1-a^2)/(1+a^2)$ çıkar. Bu örnek, paydadaki dereceleri eşleştirerek uygun yol seçmeyi öğretir.

Örnek 4.12 | İki başka karşı örnek

$(x-y)/(x+y)$, $x/\sqrt{x^2+y^2}$ ve $(x^2+y^2)/y^2$ orijinde limite sahip midir?

Ders fotoğrafından | `IMG-20261022-WA0054.jpg`

Adım adım çözüm

1. İlkinde $y = 0$ yolu 1, $x = 0$ yolu -1 verir. İkinci ifadede pozitif x ekseni 1, negatif x ekseni -1 verir. İkisinin de limiti yoktur.

2. Üçüncüde y sıfır olamaz; $y = x$ yolunda 2, $y = 2x$ yolunda $5/4$ çıkar. Bu limit de yoktur. Tanımsız yolları test yolu olarak seçme.

8 Kutupsal koordinatlar ve sıkıştırma

Orijine yaklaşırken $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, $r \to 0^+$ dönüşümü yararlıdır. Ancak sabit bir açı seçmek yalnızca bir ışını test eder. Limitin varlığını göstermek için θ ne olursa olsun sıfıra giden bir sınır bulunmalıdır. Örneğin $|r\cos\theta\sin^2\theta| \le r$ eşitsizliği böyle bir sınırdır.

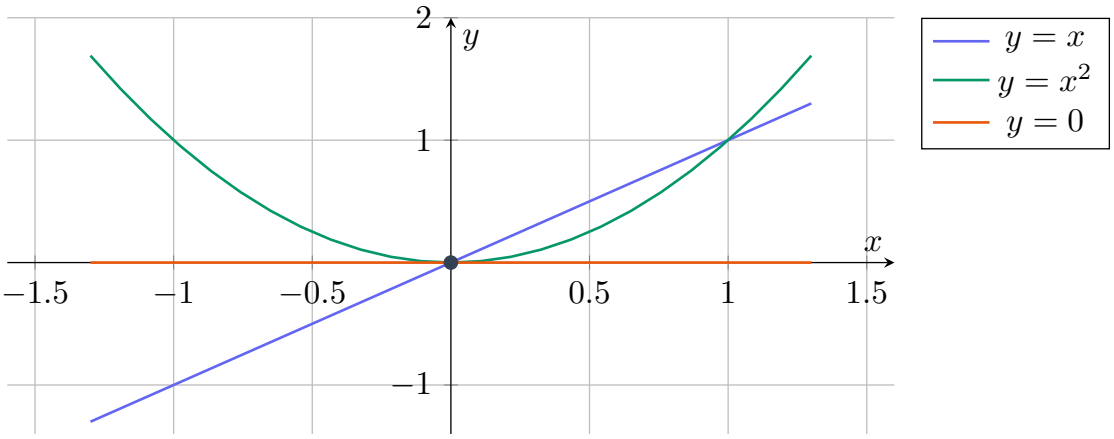
Örnek 4.13 | Dersteki parçalı fonksiyonun sürekliliği

$f(x,y) = \sin(xy^2)/(x^2+y^2)$ orijin dışında, $f(0,0) = 0$ olsun. Her yerde sürekli olduğunu gösteriniz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261022-WA0054.jpg`

Adım adım çözüm

1. Orijin dışında payda sıfır değildir, dolayısıyla süreklidir. Orijinde $|\sin u| \le |u|$ kullanılır.
2. $|f(x,y)| \le |x|y^2/(x^2+y^2) \le |x| \le \sqrt{x^2+y^2} \to 0$. Böylece limit 0 olur ve atanmış değere eşittir.
3. Kutupsal yazım da sınırı $r|\cos\theta|\sin^2\theta \le r$ yapar. Bu tüm açılar için geçerli olduğu için kanıttır.



Aynı noktaya farklı yollarla yaklaşılır. Limitin varlığı bütün bu yolları aynı anda kapsar.

9 Limit için uygulanabilir karar sırası

1. Önce tanım kümesini ve noktanın yığılma noktası olup olmadığını kontrol et.
2. Süreklilik uygunsa yerine koy. Belirsizlik varsa eşlenik veya çarpanlara ayırma dene.

3. Yokluk şüphesinde iki uygun yol seç; farklı sonuç bulunca kanıt tamamdır.
4. Varlık şüphesinde sıkıştırma veya açıdan bağımsız bir kutupsal üst sınır kur.
5. Parçalı tanımda bulunan limiti atanmış nokta değeriyle karşılaştır.

Örnek 4.14 | Bütün doğruların aynı sonucu vermesi yetmez

$f(x,y) = x^2y/(x^4+y^2)$ orijinde limite sahip midir?

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. $y = mx$ ve sabit $m \neq 0$ için $f = mx/(x^2+m^2) \to 0$. $m = 0$ ve dikey eksen de 0 verir.
2. Fakat $y = x^2$ boyunca $f = 1/2$. Bu nedenle limit yoktur. Bütün doğruların kontrol edilmesi bile genel limit için yeterli değildir.

Kaynaklar ve kapsam

Bu metin 156 ders/defter fotoğrafı ve altı başlıklı müfredata göre özgün olarak yazıldı. Fotoğraflar dersin sıra ve örneklerini belirler. Ek sorular pekiştirme olarak etiketlidir; çıkmış sınav sorusu iddiası yoktur. Soluk semboller tahminle aktarılmadı. Gradyan ve yönlü türev, müfredat gereği tamamlanan anlatımdır. Fotoğraf bazında inceleme dizini web sitesinde ve analysis/FOTOGRAF_INCELEMESI.md dosyasında bulunur. **Birincil ders malzemesi**. Kullanıcının sağladığı 156 JPG ders/defter fotoğrafı ve mufredat.png. Dosya tarihleri ders tarihi olarak varsayılmadı. Konu-fotoğraf eşleştirmesi fotoğraf dizinindedir.

Erwin Kreyszig · Advanced Engineering Mathematics. Dersin belirtilen kitabı. Wiley 10. baskı bölüm diziniyle vektör diferansiyel hesabı başlığı eşleştirildi; tam kitap dosyası sağlanmadı. Kitaptan birebir metin veya soru aktarımı yapılmadı. `https://bcs.wiley.com/he-bcs/Books?action=contents&bcsId=6140&itemId=0470458364`

KOCW · Kreyszig temelli Bölüm 9 ders notları. Sungkyunkwan / Kim Munhyeon, vektörler ve vektör fonksiyonları. Açık üniversite notu kavram ve formül kontrolünde kullanıldı. Buradaki Türkçe açıklamalar ve çözümler özgün olarak yazıldı. `https://contents.kocw.net/KOCW/document/2015/sungkyunkwan/kimmunhyeon3/8.pdf`

Zill ve Wright · Calculus / Matematik. Kullanıcının verdiği bibliyografya: İ. N. Cangül çevirisi, Nobel, 2013. Tam metne erişilmedi; baskıya özgü sayfa ve soru numarası atfedilmedi.

Mustafa Balcı · Genel Matematik II. Kullanıcının verdiği bibliyografya: Sürat, 2013. Tam metin sağlanmadı; bu kitaptan doğrulanmış alıntı veya sayfa atfı yapılmadı.

MIT OCW · 18.02 ders notları. Denis Auroux, 2007. Ders düzeni ve kavram denetimi için açık ders dizini. Müfredat dışındaki çok katlı integraller ve integral teoremleri bu çalışmaya eklenmedi. `https://ocw.mit.edu/courses/18-02-multivariable-calculus-fall-2007/pages/lecture-notes/`

MIT · Teğet düzlem ve gradyan. Gradyanın teğet düzlem ve yönlü türevle ilişkisi için açık teknik kontrol kaynağı. Konuya eklenen örnekler özgün pekiştirme sorularıdır. `https://www.ocw.mit.edu/ans7870/18/18.013a/textbook/HTML/chapter06/section05.html`