ÇALIŞMA ATÖLYESİ / KONU 05

Kısmi türev, teğet düzlem ve lineer yaklaşım

Kısmi ve karma türevler, türevlenebilirlik, diferansiyel, lineerleştirme ve hata sınırı.

Bu bölümün hedefleri

- Kısmi türev alırken hangi değişkenin sabit tutulduğunu açıklamak.
- Kısmi türevlerin varlığı ile türevlenebilirliği ayırt etmek.
- Teğet düzlem, diferansiyel ve lineer yaklaşımı hata sınırıyla kullanmak.

İçindekiler

1 Kısmi türev: tek yöndeki değişim 2

2 Yüksek mertebeli ve karma türevler 2

3 Türevlenebilirlik neden daha güçlüdür? 3

4 Teğet düzlem ve normal doğru 4

5 Lineerleştirme ve yaklaşık değer 4

6 Lineer yaklaşımın hata sınırı 5

7 Tam diferansiyel ve gerçek artış 6

8 İkinci tam diferansiyel ve Hessian 7

9 Türevlenebilirliğe ilişkin hızlı kontrol 8

Kaynaklar ve kapsam 9

1 Kısmi türev: tek yöndeki değişim

İki değişkenli bir fonksiyonda x değişirken y sabit tutulursa tek değişkenli bir kesit elde edilir. Bu kesitin türevi f_x olur. Benzer biçimde y değişirken x sabit tutularak f_y bulunur. Sabit tutmak, diğer değişkeni sıfır yapmak demek değildir; türev sırasında katsayı gibi davranmasını sağlamaktır.

$$f_x(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}, \qquad f_y(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}.$$

Örnek 5.1 | Dersteki temel kısmi türev

$f(x,y)=x^2y^3+3x$ için birinci kısmi türevleri bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261022-WA0055.jpg`

Adım adım çözüm

1. x yönünde y sabittir: $f_x=2xy^3+3$. y yönünde x sabittir: $f_y=3x^2y^2$.
2. Örneğin $(1,2)$ noktasında $f_x=19$, $f_y=12$. Bunlar yüzeyin koordinat kesitlerindeki eğimleridir.

Örnek 5.2 | Limit tanımıyla kısmi türev

$f(x,y)=x^2y$ için $f_x(a,b)$ değerini tanımdan bulunuz.

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. $[f(a+h,b)-f(a,b)]/h=[(a+h)^2b-a^2b]/h=2ab+bh$.
2. h sıfıra giderken $f_x(a,b)=2ab$ elde edilir. Bu, diğer değişkeni neden sabit tuttuğumuzu doğrudan gösterir.

2 Yüksek mertebeli ve karma türevler

Birinci kısmi türevler de fonksiyon olduğundan yeniden türevlenebilir. Bu notlarda $f_{xy}=(f_x)_y$: önce x, sonra y türevi demektir. İşlem sırasını açık yazmak farklı kaynaklardaki gösterim karışıklığını önler. Karma türevler bir komşulukta sürekli ise Clairaut-Schwarz teoremi $f_{xy}=f_{yx}$ verir.

$$f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad f_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Örnek 5.3 | Dersteki rasyonel fonksiyonun ikinci türevleri

$f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$, $(x,y) \neq (0,0)$ için ikinci kısmi türevleri bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261022-WA0055.jpg`

Adım adım çözüm

1. $S = x^2 + y^2$ kısaltmasıyla bölüm kuralından $f_x = y(y^2 - x^2)/S^2$, $f_y = x(x^2 - y^2)/S^2$.
2. f_{xx} için $-2xy/S^2 - 4xy(y^2 - x^2)/S^3$ ortak paydada toplanır: $f_{xx} = 2xy(x^2 - 3y^2)/S^3$.
3. Simetriyle $f_{yy} = 2xy(y^2 - 3x^2)/S^3$. Karma türev $f_{xy} = (-x^4 + 6x^2y^2 - y^4)/S^3$.
4. Orijin dışında türevler süreklidir; $f_{yx} = f_{xy}$. Orijinde başlangıç fonksiyonu tanımlı olmadığı için bu formüller orijine uygulanmaz.

Teoremin koşulları

Karma türevlerin eşitliğini koşulsuz kabul etme. Sürekli ikinci kısmi türevler yeterli bir koşuldur; parçalı tanımlı fonksiyonlarda ayrı kontrol gerekebilir.

3 Türevlenebilirlik neden daha güçlüdür?

Kısmi türevler iki özel yönü ölçer. Türevlenebilirlik ise noktanın çevresindeki tüm küçük değişimlerin aynı lineer fonksiyonla açıklanabilmesini ister. Hata, yer değiştirmenin uzunluğuna göre ihmal edilebilir olmalıdır. Bu koşul teğet düzlemin yüzeyi yerel olarak temsil etmesini sağlar.

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k + R(h,k), \qquad \frac{R(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0.$$

f_x, f_y bir komşulukta var ve noktada sürekli ise f o noktada türevlenebilirdir. Türevlenebilirlik sürekliliği ve kısmi türevlerin varlığını gerektirir. Ters yöndeki çıkarımlar tek başlarına doğru değildir.

Örnek 5.4 | Kısmi türevler var, süreklilik yok

$f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$ orijin dışında, $f(0,0) = 0$ olsun. Orijinde kısmi türevleri ve türevlenebilirliği inceleyiniz.

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. Eksenler boyunca fonksiyon sıfırdır. Bu yüzden $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.
2. $y = x$ boyunca değer $1/2$, dolayısıyla fonksiyon orijinde sürekli değildir. Sürekli olmayan fonksiyon türevlenebilir olamaz.

4 Teğet düzlem ve normal doğru

$z = f(x,y)$ grafiğinde $P = (a,b,f(a,b))$ noktasındaki iki teğet yön $(1,0,f_x)$ ve $(0,1,f_y)$ olur. Çarpımları $(-f_x,-f_y,1)$ normalini verir. Yeterli türevlenebilirlik koşulları altında bu normal teğet düzlemi belirler.

$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b).$$

Normal doğru: $(x,y,z) = (a,b,f(a,b)) + t(-f_x(a,b), -f_y(a,b), 1).$

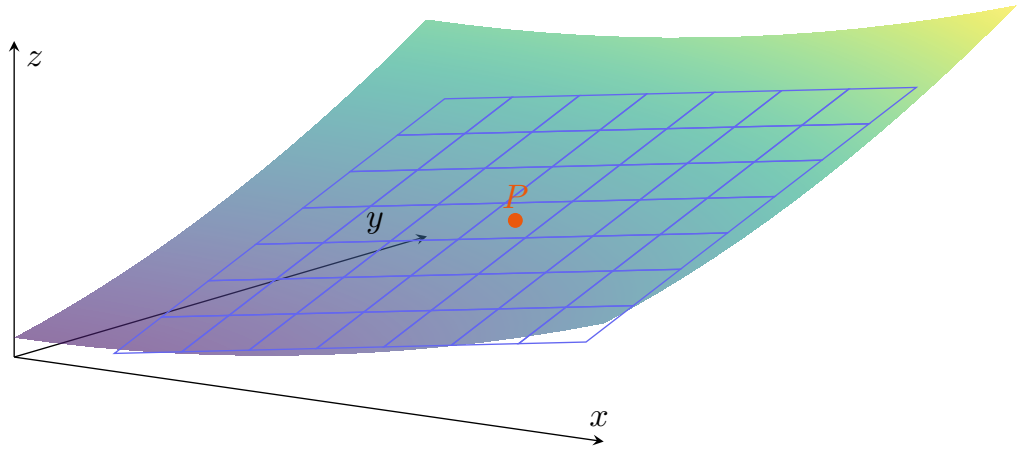
Örnek 5.5 | Teğet düzlem ve lineer model

$f(x,y) = x^2 + y^2$ için $(1,2,5)$ noktasındaki teğet düzlemi ve normal doğruyu bulunuz.

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. $f_x = 2x, f_y = 2y$. Noktadaki eğimler 2 ve 4. Düzlem $z - 5 = 2(x-1) + 4(y-2)$, yani $z = 2x + 4y - 5$.
2. Normal doğru $(x,y,z) = (1,2,5) + t(-2,-4,1)$. Normalin işaretini ters almak aynı doğruyu verir.



Yüzey ile teğet düzlem, temas noktası yakınında aynı birinci mertebe değişimi verir.

5 Lineerleştirme ve yaklaşık değer

Lineerleştirme $L(x,y)$, teğet düzlemin z değeri olarak okunan afin fonksiyondur. Hesabı kolay bir merkez seçilir; merkezdeki fonksiyon değeri ve türevler bulunur; hedef noktanın küçük farkları formüle konur. Yaklaşımın güvenilirliği, merkeze uzaklık ve ikinci türevlerin büyüklüğüne bağlıdır.

$$L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b), \qquad f(x,y) \approx L(x,y).$$

Örnek 5.6 | Dersteki üstel fonksiyonun iki lineerleştirmesi

$f(x,y)=e^{2y-x}$ için $P=(0,0)$ ve $Q=(1,2)$ merkezlerindeki lineerleştirmeleri bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261105-WA0038.jpg`

Adım adım çözüm

1. $f_x=-e^{2y-x}$, $f_y=2e^{2y-x}$. P merkezinde $L_P=1-x+2y$.
2. Q merkezinde $f=e^3, f_x=-e^3, f_y=2e^3$. Bu yüzden $L_Q=e^3-e^3(x-1)+2e^3(y-2)=e^3(2y-x-2)$.
3. Her model kendi merkezinin yakınında kullanılır. Örneğin $f(0.01,0.02)=e^{0.03}\approx 1.03$; bu hedef P merkezine yakındır.

Örnek 5.7 | Karekökün yaklaşık değeri

$\sqrt{(3.01)^2+(3.98)^2}$ ifadesini diferansiyel veya lineer modelle yaklaşık hesaplayınız.

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, merkez $(3,4)$, $f=5$. $f_x=3/5, f_y=4/5$.
2. $h=0.01, k=-0.02$. Yaklaşık değer $5+(3/5)(0.01)+(4/5)(-0.02)=4.99$.

6 Lineer yaklaşımın hata sınırı

İkinci türevler merkezi hedefe bağlayan parçayı içeren bir bölgede sürekli ve $|f_{xx}|\le M$, $|f_{xy}|\le M$, $|f_{yy}|\le M$ olsun. Tek değişkenli Taylor teoremi $g(t)=f(a+th,b+tk)$ fonksiyonuna uygulanırsa aşağıdaki güvenli üst sınır elde edilir. M yalnızca merkezdeki değer değildir; bütün ilgili bölgede geçerli olmalıdır.

$$|f(a+h,b+k)-L(a+h,b+k)|\le \frac{M}{2}(|h|+|k|)^2.$$

Örnek 5.8 | Defterdeki hata sınırı

$f=x^2+3xy+2y^2+4$, merkez $(2,1)$, $|x-2|,|y-1|\le 0.01$. Lineerleştirmeyi ve hata sınırını bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261022-WA0060.jpg`

Adım adım çözüm

1. $f(2,1)=16$, $f_x(2,1)=7$, $f_y(2,1)=10$. $L=16+7(x-2)+10(y-1)=7x+10y-8$.
2. $f_{xx}=2, f_{xy}=3, f_{yy}=4$. M =4 seçilir; hata en fazla $\frac{4}{2}(0.01+0.01)^2=0.0008$.
3. Kontrol: gerçek kalan $h^2+3hk+2k^2$ olur. Mutlak değer için daha sıkı 0.0006 sınırı da mümkündür; dersteki 0.0008 güvenli ve doğrudur.

Örnek 5.9 | İkinci hata sınırı sorusu

$f = x^2 - 3xy + y^2$, merkez $(1, 2)$, $|x - 1|, |y - 2| \le 0.1$. L ve güvenli hata sınırını bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261105-WA0038.jpg`

Adım adım çözüm

1. $f(1, 2) = -1, f_x = -4, f_y = 1$ olduğundan $L = -1 - 4(x - 1) + (y - 2) = -4x + y + 1$.
2. İkinci türevlerin mutlak değerleri 2,3,2; M =3. Hata $\le (3/2)(0.1 + 0.1)^2 = 0.06$.

Örnek 5.10 | Küçük bölgede kosinüs hatası

$f(x, y) = 1 + x + \cos y$, merkez $(0, 0)$, $|x|, |y| \le 0.2$. L ve hata sınırını bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261105-WA0040.jpg`

Adım adım çözüm

1. $f(0, 0) = 2, f_x = 1, f_y(0, 0) = 0$. Böylece $L = 2 + x$.
2. $f_{xx} = f_{xy} = 0, |f_{yy}| = |\cos y| \le 1$. Genel sınır 0.08 verir; yalnız y yönündeki gerçek ikinci terim kullanılırsa $|f - L| = |\cos y - 1| \le y^2/2 \le 0.02$.

7 Tam diferansiyel ve gerçek artış

Gerçek artış $\Delta f = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$ tam farktır. Diferansiyel $df = f_x\,dx + f_y\,dy$ bu farkın lineer kısmıdır. Yaklaşık hesapta $dx = \Delta x, dy = \Delta y$ alınır; buna rağmen df ve Δf genel olarak eşit değildir. Üç değişkende $dw = f_x dx + f_y dy + f_z dz$.

Örnek 5.11 | Tahtadaki silindir hacmi değişimi

Yarıçapı 3 cm, yüksekliği 10 cm olan silindirde yarıçap 0.01 cm artsın, yükseklik 0.1 cm azalsın. Hacim değişimini yaklaşık bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261108-WA0066.jpg`

Adım adım çözüm

1. $V = \pi r^2 h$; $dV = 2\pi r h\,dr + \pi r^2\,dh$. $dr = 0.01, dh = -0.1$.
2. $dV = 60\pi(0.01) + 9\pi(-0.1) = -0.3\pi$ santimetre küp. Başlangıç hacmi 90π, yeni hacim yaklaşık 89.7π.
3. Tam değer $\pi(3.01)^2(9.9) = 89.69499\pi$. Yaklaşık ve tam değer arasındaki fark 0.00501π; yüksek mertebeli terimlerden gelir.

Örnek 5.12 | Silindir için ikinci ders sorusu

Yarıçap 10 cm den 9.9 cm ye, yükseklik 30 cm den 30.3 cm ye değişiyor. Yaklaşık hacim değişimi nedir?

Ders fotoğrafından | `IMG-20261108-WA0083.jpg`

Adım adım çözüm

1. $dr = -0.1, dh = 0.3$. $dV = 2\pi(10)(30)(-0.1) + \pi(100)(0.3) = -30\pi$ santimetre küp.
2. Başlangıç hacmi 3000π, yeni hacim yaklaşık 2970π. İşaret hacmin azaldığını gösterir.

8 İkinci tam diferansiyel ve Hessian

Bağımsız dx, dy artışları sabit kabul edilerek bir kez daha diferansiyel alınır. Karma terim iki kez geldiği için katsayı 2 olur. d^2f, karesi alınmış df değildir. İkinci mertebe Taylor yaklaşımında bu terimin yarısı kullanılır.

$$d^2f = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dx\,dy + f_{yy}dy^2, \qquad f(a+h,b+k) \approx f + df + \frac{1}{2}d^2f.$$

$$d^2w = w_{xx}dx^2 + w_{yy}dy^2 + w_{zz}dz^2 + 2w_{xy}dx\,dy + 2w_{xz}dx\,dz + 2w_{yz}dy\,dz.$$

Örnek 5.13 | Tahtadaki polinom diferansiyeli

$f = x^3 + 5xy^2 + 3xy + 4x - 3y + 5$ için df ve ikinci diferansiyeli yazınız.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261108-WA0082.jpg`

Adım adım çözüm

1. $f_x = 3x^2 + 5y^2 + 3y + 4$, $f_y = 10xy + 3x - 3$. df bu katsayılarla dx ve dy nin toplamıdır.
2. $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = 10y + 3$, $f_{yy} = 10x$. Dolayısıyla $d^2f = 6x\,dx^2 + 2(10y+3)dx\,dy + 10x\,dy^2$.

Örnek 5.14 | Üç değişkenli polinomun diferansiyelleri

$w = 3x^2yz^2 - 3xy + 2yz^2 + xyz$ için birinci ve ikinci diferansiyeli bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261108-WA0082.jpg`

Adım adım çözüm

1. $w_x = 6xyz^2 - 3y + yz$, $w_y = 3x^2z^2 - 3x + 2z^2 + xz$, $w_z = 6x^2yz + 4yz + xy$. $dw = w_x dx + w_y dy + w_z dz$.
2. $w_{xx} = 6yz^2, w_{yy} = 0, w_{zz} = 6x^2y + 4y$. Karma türevler $w_{xy} = 6xz^2 - 3 + z$, $w_{xz} = 12xyz + y$, $w_{yz} = 6x^2z + 4z + x$.
3. İkinci diferansiyel bu altı katsayı yukarıdaki genel formüle yerleştirilerek elde edilir. Her karma terimin katsayısı 2 ile çarpılır.

9 Türevlenebilirliğe ilişkin hızlı kontrol

1. Kısmi türevde diğer girdiyi sabit tut; nokta değerini türev aldıktan sonra yerleştir.
2. Karma türevde hangi değişkene önce türev aldığını yaz.
3. Teğet düzlem için yüzeydeki noktanın gerçekten grafiğin üzerinde olduğunu doğrula.
4. Lineerleştirmede sabit terimi unutma: L merkezde f değerini vermeli.
5. Hata üst sınırında ikinci türevleri bütün bölgede sınırla; yalnız merkezde ölçme.

Kaynaklar ve kapsam

Bu metin 156 ders/defter fotoğrafı ve altı başlıklı müfredata göre özgün olarak yazıldı. Fotoğraflar dersin sıra ve örneklerini belirler. Ek sorular pekiştirme olarak etiketlidir; çıkmış sınav sorusu iddiası yoktur. Soluk semboller tahminle aktarılmadı. Gradyan ve yönlü türev, müfredat gereği tamamlanan anlatımdır. Fotoğraf bazında inceleme dizini web sitesinde ve analysis/FOTOGRAF_INCELEMESI.md dosyasında bulunur. **Birincil ders malzemesi**. Kullanıcının sağladığı 156 JPG ders/defter fotoğrafı ve mufredat.png. Dosya tarihleri ders tarihi olarak varsayılmadı. Konu-fotoğraf eşleştirmesi fotoğraf dizinindedir.

Erwin Kreyszig · Advanced Engineering Mathematics. Dersin belirtilen kitabı. Wiley 10. baskı bölüm diziniyle vektör diferansiyel hesabı başlığı eşleştirildi; tam kitap dosyası sağlanmadı. Kitaptan birebir metin veya soru aktarımı yapılmadı. `https://bcs.wiley.com/he-bcs/Books?action=contents&bcsId=6140&itemId=0470458364`

KOCW · Kreyszig temelli Bölüm 9 ders notları. Sungkyunkwan / Kim Munhyeon, vektörler ve vektör fonksiyonları. Açık üniversite notu kavram ve formül kontrolünde kullanıldı. Buradaki Türkçe açıklamalar ve çözümler özgün olarak yazıldı. `https://contents.kocw.net/KOCW/document/2015/sungkyunkwan/kimmunhyeon3/8.pdf`

Zill ve Wright · Calculus / Matematik. Kullanıcının verdiği bibliyografya: İ. N. Cangül çevirisi, Nobel, 2013. Tam metne erişilmedi; baskıya özgü sayfa ve soru numarası atfedilmedi.

Mustafa Balcı · Genel Matematik II. Kullanıcının verdiği bibliyografya: Sürat, 2013. Tam metin sağlanmadı; bu kitaptan doğrulanmış alıntı veya sayfa atfı yapılmadı.

MIT OCW · 18.02 ders notları. Denis Auroux, 2007. Ders düzeni ve kavram denetimi için açık ders dizini. Müfredat dışındaki çok katlı integraller ve integral teoremleri bu çalışmaya eklenmedi. `https://ocw.mit.edu/courses/18-02-multivariable-calculus-fall-2007/pages/lecture-notes/`

MIT · Teğet düzlem ve gradyan. Gradyanın teğet düzlem ve yönlü türevle ilişkisi için açık teknik kontrol kaynağı. Konuya eklenen örnekler özgün pekiştirme sorularıdır. `https://www.ocw.mit.edu/ans7870/18/18.013a/textbook/HTML/chapter06/section05.html`