ÇALIŞMA ATÖLYESİ / KONU 06

Zincir kuralı, yönlü türev ve gradyan

Bağımlılık ağaçları, kapalı türev, değişken dönüşümleri, en hızlı artış ve seviye yüzeyine normal.

Bu bölümün hedefleri

- Birden fazla yoldan gelen türev katkılarını zincir kuralında toplamak.
- Kapalı denklemlerde türevleri geçerlilik koşullarıyla hesaplamak.
- Gradyan ve birim yön kullanarak yönlü türev ve en hızlı artışı bulmak.

İçindekiler

1 Bağımlılık ağacı ve tek parametreli zincir kuralı 2

2 İki yeni değişkene bağlı zincir kuralı 2

3 Hem doğrudan hem dolaylı bağımlılık 3

4 Kapalı fonksiyonlarda türev 4

5 İkinci türevde zincir kuralı 4

6 Gradyan: türevleri bir vektörde toplamak 5

7 Yönlü türev ve yönü birimleştirme 5

8 En hızlı artış, azalış ve değişmeyen yön 6

9 Gradyan neden seviye kümesine diktir? 7

10 Bütün konuları bağlayan çözüm stratejisi 7

Kaynaklar ve kapsam 9

1 Bağımlılık ağacı ve tek parametreli zincir kuralı

$z = f(x, y)$ ve $x = x(t), y = y(t)$ ise t değişince z iki yoldan etkilenir. Her yol üzerindeki türevler çarpılır ve yollar toplanır. Önce hangi değişkenin hangisine bağlı olduğunu çizmek, eksik terimleri önler. f nin türevleri $(x(t), y(t))$ noktasında değerlendirilir.

$$\frac{dz}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt}, \qquad \frac{dw}{dt} = f_x x\prime(t) + f_y y\prime(t) + f_z z\prime(t).$$

İkinci formülde $f_x x\prime$ ifadesi $f_x\, x\prime$ çarpımıdır; ikinci kısmi türev f_{xx} ile karıştırılmamalıdır. Bütün ara değişkenler aynı parametreye bağlıysa d/dt kullanılır.

Örnek 6.1 | Tahtadaki trigonometrik zincir örneği

$z = x^2 + y^2$, $x = \cos t + \sin t$, $y = \cos t - \sin t$. dz/dt nedir?

Ders fotoğrafından | `IMG-20261105-WA0041.jpg`

Adım adım çözüm

1. $z_x = 2x, z_y = 2y$; $x\prime = -\sin t + \cos t$, $y\prime = -\sin t - \cos t$. Zincir toplamı 0 olur.
2. Doğrudan kontrol: $(\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2 = 2$. Sabit fonksiyonun türevi 0.

Örnek 6.2 | Çarpanlı fonksiyonda zincir kuralı

$z = xy$, $x = \cos t, y = \sin t$. dz/dt yi bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261105-WA0041.jpg`

Adım adım çözüm

1. $z_x = y, z_y = x$. Böylece $z\prime = \sin t(-\sin t) + \cos t \cos t = \cos^2 t - \sin^2 t$.
2. Doğrudan $z = \frac{1}{2}\sin 2t$ türevi de $\cos 2t$, aynı sonuçtur.

2 İki yeni değişkene bağlı zincir kuralı

$z = f(x(u, v), y(u, v))$ olduğunda u ve v bağımsız yeni değişkenlerdir. u ya göre türev alırken v sabit tutulur. Aynı dış fonksiyonun farklı iç yolları katkı verir. Daha çok ara değişken varsa her biri için bir terim eklenir.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f_x x_u + f_y y_u, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = f_x x_v + f_y y_v.$$

Bu formüllerde $f_x x_u$, $f_x\, x_u$ çarpımıdır. Matris biçimi $D(f \circ g) = Df(g)Dg$ ile aynı düzeni ifade eder. Çarpım sırası, önce iç değişkenlerin değişimi sonra dış fonksiyonun etkisi uygulanacak biçimdedir.

Örnek 6.3 | Tahtadaki logaritma örneği

$z = \ln(x^2 + y^2)$, $x = e^u \cos v, y = e^u \sin v$. z_u, z_v nedir?

Ders fotoğrafından | `IMG-20261108-WA0074.jpg`

Adım adım çözüm

1. $f_x = 2x/(x^2 + y^2)$, $f_y = 2y/(x^2 + y^2)$. $x_u = x, y_u = y, x_v = -y, y_v = x$.
2. $z_u = 2(x^2 + y^2)/(x^2 + y^2) = 2$; $z_v = (-2xy + 2xy)/(x^2 + y^2) = 0$.
3. Kontrol: $x^2 + y^2 = e^{2u}$, dolayısıyla $z = 2u$.

Örnek 6.4 | Üç ara değişkenli ders örneği

$S = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $x = u + v, y = u - v, z = 2\sqrt{uv}$. Pozitif u ve v için S_u, S_v bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261108-WA0077.jpg`

Adım adım çözüm

1. $x_u = x_v = 1, y_u = 1, y_v = -1, z_u = v/\sqrt{uv}, z_v = u/\sqrt{uv}$.
2. Payda $x^2 + y^2 + z^2 = 2(u + v)^2$. Zincir toplamları $S_u = S_v = 2/(u + v)$.
3. Doğrudan $S = \ln 2 + 2\ln(u + v)$ aynı sonucu verir. $u, v > 0$ seçimi kökün içte türevlenmesini ve logaritmanın tanımını güvenceye alır.

3 Hem doğrudan hem dolaylı bağımlılık

Bazen bir değişken hem f içinde doğrudan görünür hem de ara değişkenlerin içinde yer alır. Örneğin $z = f(x, y)$, $y = y(x)$ ise f nin x e doğrudan katkısı da eklenmelidir. Yalnızca dolaylı yolu almak bir terimi kaybettirir.

$$\frac{dz}{dx} = f_x + f_y \frac{dy}{dx}.$$

Örnek 6.5 | İki bağımsız yeni değişkenle karmaşık örnek

$z = e^{x/y}$, $x = \sin u, y = u^2 v$, $u, v \neq 0$. z_u, z_v yi bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261108-WA0079.jpg`

Adım adım çözüm

1. $f_x = e^{x/y}/y$, $f_y = -xe^{x/y}/y^2$. $x_u = \cos u, x_v = 0, y_u = 2uv, y_v = u^2$.
2. $z_u = e^{\sin u/(u^2 v)}[\cos u/(u^2 v) - 2\sin u/(u^3 v)]$.
3. $z_v = -e^{\sin u/(u^2 v)} \sin u/(u^2 v^2)$. İç ifadeyi önce sadeleştirip türev almak da kontrol yöntemidir.

4 Kapalı fonksiyonlarda türev

$F(x,y)=0$ denklemi y yi açıkça çözmeden yerel olarak y(x) tanımlayabilir. F bir komşulukta sürekli birinci türevlere sahipse ve $F_y \neq 0$ ise kapalı fonksiyon teoremi bu yerel çözümü güvenceye alır. Türev alınırken y nin de x e bağlı olduğu unutulmamalıdır.

$$F_x + F_y y\prime = 0 \quad \Longrightarrow \quad y\prime = -\frac{F_x}{F_y}, \qquad F_y \neq 0.$$

Üç değişkende $F(x,y,z)=0$, z yi yerel olarak z(x,y) tanımlıyorsa x türevinde y sabit, y türevinde x sabit tutulur. Sürekli birinci türevler ve $F_z \neq 0$ koşuluyla aşağıdaki formüller geçerlidir.

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z}, \qquad z_y = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Örnek 6.6 | Tahtadaki kapalı türev sorusu

$2x^4z^3 + 3xy^2 + 4xz + 3y + 5x - 23 = 0$ denkleminin tanımladığı z(x,y) için $(1,2)$ noktasında z_x, z_y nedir?

Ders fotoğrafından | `IMG-20261108-WA0081.jpg`

Adım adım çözüm

1. Önce z bulunur: $2z^3 + 4z = 0$. Gerçek çözüm $z=0$; inceleme noktası $(1,2,0)$.
2. $F_x = 8x^3z^3 + 3y^2 + 4z + 5$, $F_y = 6xy + 3$, $F_z = 6x^4z^2 + 4x$.
3. Noktada $F_x = 17, F_y = 15, F_z = 4 \neq 0$. Böylece $z_x = -17/4, z_y = -15/4$. Yerel z(x,y) yorumu geçerlidir.

Örnek 6.7 | Kapalı denklemin teğet düzlemi

$x^2 + y^2 + z^2 = 9$ küresinin $(1,2,2)$ noktasındaki teğet düzlemi nedir?

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. $F = x^2 + y^2 + z^2 - 9$, gradyanı $(2x, 2y, 2z)$. Noktada normal $(2,4,4)$.
2. $2(x-1) + 4(y-2) + 4(z-2) = 0$, yani $x + 2y + 2z = 9$. Bu normal merkezden noktaya giden yarıçapla paraleldir.

5 İkinci türevde zincir kuralı

Bir değişken dönüşümünde ikinci türev alınırken ilk zincir toplamının hem katsayıları hem türevleri değişir. Bu nedenle iç fonksiyonların ikinci türevleri de ortaya çıkar. $x = x(t), y = y(t)$ için sürekli ikinci türevler varsayımıyla:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = f_{xx}(x\prime)^2 + 2f_{xy}x\prime y\prime + f_{yy}(y\prime)^2 + f_x x\prime\prime + f_y y\prime\prime.$$

Örnek 6.8 | Dersteki diferansiyel denklem dönüşümü

$x = e^t$ dönüşümü altında $x^2 y_{xx} + x y_x - y = 0$ denklemini t değişkenine dönüştürünüz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261105-WA0042.jpg`

Adım adım çözüm

1. $dt/dx = 1/x$. Dolayısıyla $y_x = y_t/x$.
2. Yeniden x türevi: $y_{xx} = (y_{tt} - y_t)/x^2$. Burada hem y_t hem $1/x$ türevlenir.
3. Denklem $(y_{tt} - y_t) + y_t - y = 0$, yani $y_{tt} - y = 0$ olur. Dönüşüm $x > 0$ için geçerlidir.

6 Gradyan: türevleri bir vektörde toplamak

Müfredatı tamamlayan anlatım

Fotoğraflarda zincir kuralı ve kapalı türev örnekleri açıkça görülüyor. Yönlü türev ve gradyan ise verilen müfredatın 6. başlığında yer alıyor; bu alt bölümler standart vektör analizi kurallarıyla tamamlandı. Aşağıdaki örnekler ders tahtasından aktarılmış sorular olarak sunulmuyor.

Bir skaler alanın gradyanı kısmi türevlerden oluşan vektördür. Sıcaklık alanında her noktada hangi yöne gidildiğinde sıcaklığın daha hızlı arttığını anlatır. Skaler alan sayısal değer verir; onun gradyanı bir vektör alanıdır. Bu fark, birim ve boyut kontrolü için önemlidir.

$$\nabla f = (f_x, f_y), \qquad \nabla F = (F_x, F_y, F_z).$$

Türevlenebilirlik altında küçük bir $\mathbf{h}$ yer değiştirmesi için $f(P + \mathbf{h}) - f(P) \approx \nabla f(P) \cdot \mathbf{h}$. Böylece önceki bölümdeki tam diferansiyel, gradyanın yer değiştirmeyle skaler çarpımıdır. Gradyanın bileşenleri, koordinat eksenlerindeki değişim hızlarıdır.

7 Yönlü türev ve yönü birimleştirme

Kısmi türev yalnız eksenler boyunca değişimi ölçerken yönlü türev seçilen herhangi bir birim yönde birim uzunluk başına değişimi ölçer. $\mathbf{u}$ birim olmak zorundadır. Yön $\mathbf{v}$ olarak verilirse önce $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ alınır. P den Q ya yön sorulursa vektör Q-P dir.

$$D_{\mathbf{u}} f(P) = \lim_{h \to 0} \frac{f(P + h\mathbf{u}) - f(P)}{h} = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u}, \qquad \|\mathbf{u}\| = 1.$$

Son eşitlik f nin P de türevlenebilirliği altında geçerlidir. Yalnızca kısmi türevlerin varlığını bilmek yeterli değildir. Birim olmayan vektörle skaler çarpım, o parametrizasyonun hızını da içerir; standart yönlü türevle aynı sayı olmayabilir.

Örnek 6.9 | Birim olmayan yönden yönlü türev

$f(x,y) = x^2y + 3y$, $P = (1,2)$, yön $\mathbf{v} = (3,4)$. Yönlü türev nedir?

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. $f_x = 2xy, f_y = x^2 + 3$. $\nabla f(1,2) = (4,4)$.
2. Yönün normu 5; $\mathbf{u} = (3/5, 4/5)$. $D_{\mathbf{u}}f = 4(3/5) + 4(4/5) = 28/5$.
3. Birimleştirmeden alınan 28 sonucu, parametre hızını 5 katına çıkarır ve bu sorunun istediği birim uzunluk başına türev değildir.

Örnek 6.10 | P den Q ya doğru değişim

$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $P = (1,0,2)$, $Q = (3,1,4)$. P de Q yönündeki türev nedir?

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. $Q - P = (2,1,2)$, norm 3; birim yön $(2,1,2)/3$. $\nabla F(P) = (2,0,4)$.
2. Skaler çarpım $(4+0+8)/3 = 4$. Sonucun pozitif olması bu yönde ilk anda alan değerinin arttığını gösterir.

8 En hızlı artış, azalış ve değişmeyen yön

Sıfır olmayan gradyan için $D_{\mathbf{u}}f = \|\nabla f\| \cos\theta$. En büyük kosinüs 1, en küçük -1 olduğundan en hızlı artış gradyan yönündedir. Gradyana dik yönlerde birinci mertebeden değişim sıfırdır. Bu, fonksiyonun o doğrultuda her uzaklıkta sabit kalacağı anlamına gelmez.

$$\max_{\|\mathbf{u}\|=1} D_{\mathbf{u}}f = \|\nabla f\|, \quad \mathbf{u}_{\max} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}, \quad \min D_{\mathbf{u}}f = -\|\nabla f\|.$$

Örnek 6.11 | Gradyanla yön seçmek

$f = x^2 + 2y^2$ için P =(1,1) noktasında en hızlı artış yönü, hızı ve sıfır değişim yönü nedir?

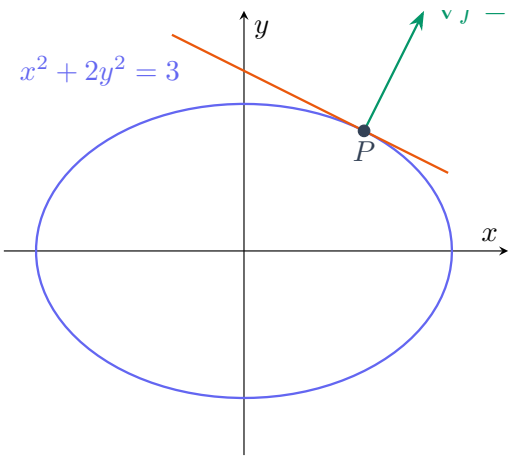
Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. $\nabla f = (2x, 4y)$; P de $(2,4)$, norm $2\sqrt{5}$. En hızlı artış birim yönü $(1,2)/\sqrt{5}$, hızı $2\sqrt{5}$.
2. En hızlı azalış ters yönde ve türev $-2\sqrt{5}$. Sıfır türev yönlerinden biri $(-2,1)/\sqrt{5}$, çünkü $(2,4)\cdot(-2,1) = 0$.

Gradyan sıfırsa

$\nabla f(P) = \mathbf{0}$ ve f türevlenebilir ise tüm birim yönlerde birinci yönlü türev sıfırdır. Bu bilgi tek başına maksimum, minimum veya sabitlik göstermez; daha yüksek mertebe inceleme gerekir.



Gradyan seviye eğrisine diktir. Birim yön gradyana döndükçe yönlü türev artar.

9 Gradyan neden seviye kümesine diktir?

$f(x(t), y(t)) = c$ seviye eğrisi boyunca sabittir. Zincir kuralıyla $0 = f_x x' + f_y y' = \nabla f \cdot \mathbf{r}'$. Dolayısıyla sıfır olmayan gradyan eğrinin teğetine diktir. Üç boyutta aynı kanıt seviye yüzeyi üzerindeki bütün teğet yönler için geçerlidir.

$$\nabla F(P) \cdot \big((x, y, z) - P\big) = 0, \qquad F(P) = c, \quad \nabla F(P) \neq \mathbf{0}.$$

Örnek 6.12 | Seviye eğrisinin teğet doğrusu

$x^2 + 2y^2 = 3$ eğrisinin (1,1) noktasındaki teğeti nedir?

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. Gradyan $(2, 4)$ teğete normaldir. $2(x - 1) + 4(y - 1) = 0$, yani $x + 2y = 3$.
2. Bu doğrultu önceki örnekteki sıfır yönlü türev doğrultusuyla aynıdır. Teğet doğrusu eğriye yalnızca yerel olarak yaklaşır.

10 Bütün konuları bağlayan çözüm stratejisi

1. Değişkenlerin bağımlılıklarını önce yaz; her bağımsız yolun katkısını ekle.
2. Kapalı türevde önce noktayı tamamla, sonra paydadaki türevin sıfır olmadığını denetle.

3. Yönlü türevde yönü birimleştir; türevlenebilirlik koşulunu kontrol et.
4. En hızlı artış yön sorusudur, en hızlı artış hızı ise norm sorusudur.
5. Seviye yüzeyinde gradyanı normal olarak kullan; noktanın yüzeyde olduğunu doğrula.

Örnek 6.13 | Birleşik pekiştirme

$f(x,y) = e^{x-y}$, P =(0,0). P de teğet düzlem, $(1,1)$ yönünde türev ve en hızlı artış yönünü bulunuz.

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. $f(P) = 1, \nabla f(P) = (1,-1)$. Grafik üzerindeki teğet düzlem $z = 1 + x - y$.
2. Birim yön $(1,1)/\sqrt{2}$; yönlü türev 0. En hızlı artış yönü $(1,-1)/\sqrt{2}$, artış hızı $\sqrt{2}$.
3. $x = y$ doğrusu üzerinde fonksiyon gerçekten 1 dir. Bu örnekte sıfır türev sabit seviye doğrultusuna karşılık gelir; her fonksiyonda böyle küresel bir sonuç çıkarılmaz.

Kaynaklar ve kapsam

Bu metin 156 ders/defter fotoğrafı ve altı başlıklı müfredata göre özgün olarak yazıldı. Fotoğraflar dersin sıra ve örneklerini belirler. Ek sorular pekiştirme olarak etiketlidir; çıkmış sınav sorusu iddiası yoktur. Soluk semboller tahminle aktarılmadı. Gradyan ve yönlü türev, müfredat gereği tamamlanan anlatımdır. Fotoğraf bazında inceleme dizini web sitesinde ve analysis/FOTOGRAF_INCELEMESI.md dosyasında bulunur. **Birincil ders malzemesi**. Kullanıcının sağladığı 156 JPG ders/defter fotoğrafı ve mufredat.png. Dosya tarihleri ders tarihi olarak varsayılmadı. Konu-fotoğraf eşleştirmesi fotoğraf dizinindedir.

Erwin Kreyszig · Advanced Engineering Mathematics. Dersin belirtilen kitabı. Wiley 10. baskı bölüm diziniyle vektör diferansiyel hesabı başlığı eşleştirildi; tam kitap dosyası sağlanmadı. Kitaptan birebir metin veya soru aktarımı yapılmadı. `https://bcs.wiley.com/he-bcs/Books?action=contents&bcsId=6140&itemId=0470458364`

KOCW · Kreyszig temelli Bölüm 9 ders notları. Sungkyunkwan / Kim Munhyeon, vektörler ve vektör fonksiyonları. Açık üniversite notu kavram ve formül kontrolünde kullanıldı. Buradaki Türkçe açıklamalar ve çözümler özgün olarak yazıldı. `https://contents.kocw.net/KOCW/document/2015/sungkyunkwan/kimmunhyeon3/8.pdf`

Zill ve Wright · Calculus / Matematik. Kullanıcının verdiği bibliyografya: İ. N. Cangül çevirisi, Nobel, 2013. Tam metne erişilmedi; baskıya özgü sayfa ve soru numarası atfedilmedi.

Mustafa Balcı · Genel Matematik II. Kullanıcının verdiği bibliyografya: Sürat, 2013. Tam metin sağlanmadı; bu kitaptan doğrulanmış alıntı veya sayfa atfı yapılmadı.

MIT OCW · 18.02 ders notları. Denis Auroux, 2007. Ders düzeni ve kavram denetimi için açık ders dizini. Müfredat dışındaki çok katlı integraller ve integral teoremleri bu çalışmaya eklenmedi. `https://ocw.mit.edu/courses/18-02-multivariable-calculus-fall-2007/pages/lecture-notes/`

MIT · Teğet düzlem ve gradyan. Gradyanın teğet düzlem ve yönlü türevle ilişkisi için açık teknik kontrol kaynağı. Konuya eklenen örnekler özgün pekiştirme sorularıdır. `https://www.ocw.mit.edu/ans7870/18/18.013a/textbook/HTML/chapter06/section05.html`