ÇALIŞMA ATÖLYESİ / ÇÖZÜMLÜ SORULAR

Soru çözüm atölyesi

Ders fotoğraflarından alınan örnekler ve ek pekiştirme soruları. Her soruda tam çözüm ve kaynak etiketi.

89 çözümlü örnek. Çıkmış sınav sorusu içermez. Birden fazla alt sorusu bulunan örnekler tek kayıt olarak sayıldı.

İçindekiler

1 Üç boyutlu uzay ve vektörler **2**

2 Doğrular, düzlemler ve kuadratik yüzeyler **4**

3 Vektör fonksiyonları, eğriler ve hareket **9**

4 Çok değişkenli fonksiyonlar, limit ve süreklilik **15**

5 Kısmi türev, teğet düzlem ve lineer yaklaşım **19**

6 Zincir kuralı, yönlü türev ve gradyan **23**

Kaynaklar ve kapsam **27**

1 Üç boyutlu uzay ve vektörler

Örnek 1.1 | Birim vektör

$\mathbf{u} = (3, 4)$ yönündeki birim vektörü bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261009-WA0026.jpg`

Adım adım çözüm

1. Önce norm alınır: $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{9 + 16} = 5$.
2. Her bileşeni 5 ile bölünce $\hat{\mathbf{u}} = (3/5, 4/5)$ elde edilir. Norm kontrolü $9/25 + 16/25 = 1$ verir. Ters yöndeki birim vektör bunun negatifidir.

Örnek 1.2 | Dersteki açı sorusu

$\mathbf{u} = (2, -1, 3)$ ve $\mathbf{v} = (1, 4, 2)$ dik midir? $\cos\theta$ nedir?

Ders fotoğrafından | `IMG-20261009-WA0032.jpg`

Adım adım çözüm

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 - 4 + 6 = 4$. Çarpım sıfır olmadığından dik değildirler.
2. $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{14}$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{21}$. Dolayısıyla $\cos\theta = 4/\sqrt{294}$. Pozitif sonuç açının dar olduğunu doğrular.

Örnek 1.3 | İzdüşüm hesabı

$\mathbf{u} = (2, 1, 2)$ vektörünü $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$ doğrultusuna izdüşürünüz.

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 4$, $\|\mathbf{v}\|^2 = 2$. Bu yüzden izdüşüm $2(1, 0, 1) = (2, 0, 2)$.
2. Dik kalan $(0, 1, 0)$ olur ve $(0, 1, 0) \cdot (1, 0, 1) = 0$. Skaler bileşen $4/\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Örnek 1.4 | Tahtadaki vektörel çarpım

$\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (2, 0, 1)$ için $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261023-WA0029.jpg`

Adım adım çözüm

1. Bileşenler $(2 \cdot 1 - 3 \cdot 0,\ 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1,\ 1 \cdot 0 - 2 \cdot 2)$ şeklindedir. Sonuç $(2, 5, -4)$.
2. Diklik kontrolleri: $(2, 5, -4) \cdot (1, 2, 3) = 2 + 10 - 12 = 0$ ve $(2, 5, -4) \cdot (2, 0, 1) = 4 - 4 = 0$. Alan $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, üçgen alanı $3\sqrt{5}/2$.

Örnek 1.5 | Hacim ve bağımsızlık

$\mathbf{u} = (1,0,0), \mathbf{v} = (0,2,0), \mathbf{w} = (1,1,3)$ için hacim ve bağımsızlık nedir?

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. $\mathbf{v}\times\mathbf{w} = (6,0,-2)$; $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = 6$. Paralelyüzlü hacmi 6, dörtyüzlü hacmi 1 birim küptür.
2. Determinant sıfır olmadığından bu üç vektör lineer bağımsızdır ve $\mathbb{R}^3$ için baz oluşturur.

Örnek 1.6 | Düzlemde bağımlı vektörler

$\mathbf{u} = (1,2)$, $\mathbf{v} = (-3,-6)$ bağımsız mıdır?

Ders fotoğrafından | `IMG-20261009-WA0033.jpg`

Adım adım çözüm

1. $\mathbf{v} = -3\mathbf{u}$. Bu nedenle $3\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$, sıfırdan farklı katsayılarla sağlanır.
2. Doğrultuları aynı olduğu için birlikte düzlemi germezler; yalnızca bir doğruyu gererler.

Örnek 1.7 | Düzlemde baz

$\mathbf{u} = (2,-3)$, $\mathbf{v} = (-5,4)$ düzlem için baz mıdır?

Ders fotoğrafından | `IMG-20261009-WA0034.jpg`

Adım adım çözüm

1. Determinant $2\cdot 4 - (-3)(-5) = 8 - 15 = -7 \neq 0$. Dolayısıyla bağımsızdırlar ve bazdırlar.
2. Her (x,y), $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ olarak tek biçimde yazılır. Denklem sistemi çözülürse $\alpha = -(4x + 5y)/7$, $\beta = -(3x + 2y)/7$. Yerine koyma her iki koordinatı doğrular.

Örnek 1.8 | Pekiştirme

$\mathbf{a} = (1,1,0), \mathbf{b} = (1,-1,2)$ için diklik, birim vektör ve paralelkenar alanını bulunuz.

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, dolayısıyla diktirler. $\widehat{\mathbf{a}} = (1,1,0)/\sqrt{2}$.
2. $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (2,-2,-2)$; alan $2\sqrt{3}$. Ayrıca dik vektörlerde alan $\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| = \sqrt{2}\sqrt{6} = 2\sqrt{3}$, aynı sonucu verir.

2 Doğrular, düzlemler ve kuadratik yüzeyler

Örnek 2.1 | İki noktadan geçen doğru

$A = (0, 1, 2)$, $B = (3, 1, -1)$ doğrusunu bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261009-WA0032.jpg`

Adım adım çözüm

1. $\overrightarrow{AB} = (3, 0, -3)$, bunun yerine $(1, 0, -1)$ kullanılabilir.
2. $x = t,\ y = 1,\ z = 2 - t$. Kartezyen biçim $x = 2 - z,\ y = 1$. Parametre 0 iken A, 3 iken B elde edilir.

Örnek 2.2 | Nokta ve paralel vektör

$A = (1, 2, 3)$ noktasından geçen ve $(2, 3, 0)$ yönüne paralel doğruyu yazınız.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261009-WA0030.jpg`

Adım adım çözüm

1. $x = 1 + 2t,\ y = 2 + 3t,\ z = 3$.
2. Simetrik gösterim $(x - 1)/2 = (y - 2)/3$, ayrıca $z = 3$. İki denklem uzayda tek doğruyu belirler.

Örnek 2.3 | Tahtadaki sıfır paydalı gösterim

Tahtada $x/1 = y/1 = z/0$ ve $(x - 1)/1 = y/(-1) = z/0$ ile belirtilen doğruların açısı nedir?

Ders fotoğrafından | `IMG-20261001-WA0014.jpg`

Adım adım çözüm

1. Bu gösterimde $z/0$ gerçek bir bölüm değildir; $z = 0$ kısıtının kısa yazımı olarak yorumlanır. Parametrik biçimler $(t, t, 0)$ ve $(1 + s, -s, 0)$ olur.
2. Yönler $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 0)$, çarpımları 0. $t = 1 + s = -s$ den $t = 1/2, s = -1/2$; kesişim $(1/2, 1/2, 0)$. Dolayısıyla açı $90°$.

Örnek 2.4 | Koordinat eksenlerini kesen düzlem

$A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0), C = (0, 0, 1)$ noktalarından geçen düzlemi bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261001-WA0014.jpg`

Adım adım çözüm

1. $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$. Çarpımları $(1, 1, 1)$.
2. $(x - 1) + y + z = 0$, yani $x + y + z = 1$. Üç nokta da denklemi sağlar.

Örnek 2.5 | Nokta ve normal ile düzlem

$A = (2, 3, 4)$ noktasından geçen, normali $(1, 3, 4)$ olan düzlemi bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261023-WA0030.jpg`

Adım adım çözüm

1. $(x - 2) + 3(y - 3) + 4(z - 4) = 0$.
2. Düzenlenince $x + 3y + 4z - 27 = 0$. Normalin herhangi bir sıfır olmayan katı aynı düzlemi verir.

Örnek 2.6 | Dersteki doğru-düzlem kesişimi

$(x - 2)/1 = y/2 = (z + 1)/(-1)$ doğrusu ile $x - y + 2z = 3$ düzleminin kesişimi nedir?

Ders fotoğrafından | `IMG-20261001-WA0014.jpg`

Adım adım çözüm

1. $x = 2 + t,\ y = 2t,\ z = -1 - t$ yazılır.
2. Yerine koyunca $(2 + t) - 2t + 2(-1 - t) = 3$, yani $-3t = 3$. $t = -1$ ile nokta $(1, -2, 0)$. Kontrol: $1 - (-2) + 0 = 3$.

Örnek 2.7 | İki düzlemin arakesiti

$x + y + z = 2$ ve $x - y + z = 0$ düzlemlerinin kesişimini yazınız.

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. Denklemleri çıkarınca $2y = 2$, yani $y = 1$. Sonra $x + z = 1$.
2. $x = t$ seçilirse $\mathbf{r}(t) = (t, 1, 1 - t)$. Yön $(1, 0, -1)$, normallerin vektörel çarpımına paraleldir.

Örnek 2.8 | Tahtadaki nokta-doğru uzaklığı

$P = (2, 3, -1)$ noktasının $(x - 1)/1 = (y - 2)/1 = (z - 13)/4$ doğrusuna uzaklığını bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261023-WA0057.jpg`

Adım adım çözüm

1. Doğru üzerinde $A = (1, 2, 13)$, yön $\mathbf{u} = (1, 1, 4)$. $\overrightarrow{AP} = (1, 1, -14)$.
2. $\overrightarrow{AP} \times \mathbf{u} = (18, -18, 0)$; normu $18\sqrt{2}$. Yönün normu $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Uzaklık 6.

Örnek 2.9 | Çalışma sorusu: nokta-düzlem uzaklığı

$P = (1, 0, 2)$ noktasının $x + 2y - 2z + 4 = 0$ düzlemine uzaklığı nedir?

Ders fotoğrafından | `IMG-20261001-WA0014.jpg`

Adım adım çözüm

1. Pay $|1 + 0 - 4 + 4| = 1$, payda $\sqrt{1 + 4 + 4} = 3$. Uzaklık $1/3$.
2. Dik izdüşüm noktası $H = P - \frac{1}{9}(1, 2, -2) = (8/9, -2/9, 20/9)$. Denkleme koyunca sıfır çıkar ve $\|P - H\| = 1/3$.

Örnek 2.10 | Dersteki küre sorusu

$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z - 11 = 0$ küresinin merkezi ve yarıçapı nedir?

Ders fotoğrafından | `IMG-20261009-WA0032.jpg`

Adım adım çözüm

1. $(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 + (z + 1)^2 - 1 - 11 = 0$.
2. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 25$. Merkez $(-2, 3, -1)$, yarıçap 5.

Örnek 2.11 | Doğruya dik düzlem

P =(2,3,5) noktasından geçen, $(x - 1)/4 = (y - 2)/(-1) = (z + 1)/6$ doğrusuna dik düzlemi bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261002-WA0024.jpg`

Adım adım çözüm

1. Doğrunun yönü $(4, -1, 6)$, istenen düzlemin normalidir. $4(x - 2) - (y - 3) + 6(z - 5) = 0$.
2. Denklem $4x - y + 6z - 35 = 0$. P yi yerine koyunca sıfır, doğru yönüyle normalin paralelliği ise dikliği doğrular.

Örnek 2.12 | Aynı yöntemin ikinci örneği

A =(2,3,-5) noktasından geçen, normali (7,3,4) olan düzlemi yazınız.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261002-WA0020.jpg`

Adım adım çözüm

1. $7(x - 2) + 3(y - 3) + 4(z + 5) = 0$.
2. Sonuç $7x + 3y + 4z - 3 = 0$. Üçüncü koordinat -5 olduğu için parantezde z+5 gelir.

Örnek 2.13 | Tahtadaki ikinci kesişim örneği

$(x-1)/2 = (y-1)/(-1) = z/3$ doğrusu ile $2x+3y+z+11=0$ düzleminin kesişimi nedir?

Ders fotoğrafından | `IMG-20261002-WA0026.jpg`

Adım adım çözüm

1. $x = 1+2t, y = 1-t, z = 3t$. Yerine koyunca $2+4t+3-3t+3t+11=0$, yani $4t+16=0$.
2. t =-4, kesişim $(-7, 5, -12)$. Kontrol $-14+15-12+11=0$.

Örnek 2.14 | İki düzlemin arakesiti: tahta örneği

$x+y+z=3$ ve $x-y+z=1$ düzlemlerinin arakesitini bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261002-WA0026.jpg`

Adım adım çözüm

1. Çıkarınca y =1. z =0 seçilirse x =2; nokta (2,1,0). Normal çarpımı (2,0,-2), eşdeğer yön (1,0,-1).
2. Doğru $(x,y,z) = (2,1,0) + t(1,0,-1)$. Her iki düzlem denklemine de tüm t ler için uyar.

Örnek 2.15 | Defterdeki ikinci küre

$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ küresinin merkezi ve yarıçapını bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261009-WA0028.jpg`

Adım adım çözüm

1. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16$.
2. Merkez (1,2,3), yarıçap 4. Tam kareler açıldığında sabit 14, sağdan taşınan 16 ile -2 elde edilmesi kontrol sağlar.

Örnek 2.16 | İki yüzeyin kesitlerini karşılaştır

$x^2+y^2-z^2=1$ ve $z^2-x^2-y^2=1$ neden farklıdır?

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. İlkinde $z=k$ için $x^2+y^2=1+k^2$. Her k için çember vardır; en dar kesit $z=0$ düzlemindedir. Tek kanatlı hiperboloid.
2. İkincide $x^2+y^2=k^2-1$. $|k|<1$ için kesit yok; $k=\pm 1$ için bir nokta, dışarıda çember vardır. Çift kanatlı hiperboloid.

Örnek 2.17 | Pekiştirme: yüzeyi tanı

$z = 4 - x^2 - y^2$ yüzeyinin tepesini, açılma yönünü ve $z = 0$ kesitini bulunuz.

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. Tepe $(0, 0, 4)$, karelerin katsayıları negatif olduğundan aşağı açılan eliptik paraboloid.
2. $z = 0$ kesiti $x^2 + y^2 = 4$, yarıçapı 2 olan çember. $z > 4$ için kesit yoktur.

3 Vektör fonksiyonları, eğriler ve hareket

Örnek 3.1 | Defterdeki tanım kümesi örneği

$\mathbf{F}(t) = (t+1, \ln(1-t), \sqrt{4-t^2})$ için tanım kümesini bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261009-WA0016.jpg`

Adım adım çözüm

1. İlk bileşen tüm gerçek sayılarda tanımlıdır. Logaritma için $1-t>0$, yani $t<1$. Karekök için $-2 \le t \le 2$.
2. Koşulları birlikte sağlamak gerekir: $I = [-2, 1)$. -2 kabul edilir, çünkü kök sıfır olabilir; 1 kabul edilmez, çünkü logaritma argümanı sıfır olamaz.

Örnek 3.2 | Vektör fonksiyonlarıyla işlemler

$\mathbf{F} = (t, t^2, t^3)$, $\mathbf{G} = (1-t, 1+t^2, t)$. Toplamı, skaler ve vektörel çarpımı bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261009-WA0017.jpg`

Adım adım çözüm

1. $\mathbf{F}+\mathbf{G} = (1, 1+2t^2, t^3+t)$.
2. $\mathbf{F}\cdot\mathbf{G} = t(1-t)+t^2(1+t^2)+t^4 = t+2t^4$.
3. $\mathbf{F}\times\mathbf{G} = (-t^5, t^3-t^4-t^2, t+2t^3-t^2)$. Her bileşen determinant açılımından gelir.

Örnek 3.3 | Defterdeki limit işlemleri

$\mathbf{F}(t) = (\sin t, \cos t, 1+t)$, $\mathbf{G}(t) = (\cos 2t, \sin 3t, e^t+1)$ için t sıfıra giderken skaler ve vektörel çarpım limitlerini bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261009-WA0019.jpg`

Adım adım çözüm

1. $\mathbf{F} \to (0,1,1)$, $\mathbf{G} \to (1,0,2)$.
2. Skaler çarpım limiti $(0,1,1)\cdot(1,0,2) = 2$. Vektörel çarpım limiti $(0,1,1)\times(1,0,2) = (2,1,-1)$.

Örnek 3.4 | Tam kısım içeren süreklilik

$\mathbf{F}(t) = (|t|+1, t\lfloor t \rfloor, 2+t^2)$ fonksiyonu 0 ve 1 noktalarında sürekli midir?

Ders fotoğrafından | `IMG-20261009-WA0019.jpg`

Adım adım çözüm

1. İlk ve üçüncü bileşen her yerde süreklidir. İkinci bileşen 0 yakınında solda $-t$, sağda 0 olur; iki yandan limit 0, değer de 0. Dolayısıyla 0 noktasında süreklidir.

2. 1 yakınında solda ikinci bileşen 0, sağda t olur. Limitler 0 ve 1 olduğundan 1 noktasında süreksizdir.

Örnek 3.5 | Çember ve helis

$\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, 0)$ ile $\mathbf{h}(t) = (\cos t, \sin t, 3t)$ eğrilerini yorumlayınız.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261009-WA0022.jpg`

Adım adım çözüm

1. İlkinde $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$. $a > 0$ ve $0 \le t \le 2\pi$ için pozitif z yönünden bakıldığında çember saat yönünün tersine bir tur taranır.
2. İkincide $x^2 + y^2 = 1$; yükseklik t ile artar. Bir turda t, 2π artar ve yükseklik 6π değişir. Bu eğri bir helistir.

Örnek 3.6 | Parçalı düzgün eğri

$\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a|\sin t|, 0)$, $-2\pi \le t \le 2\pi$, $a > 0$ için düzgünlük nasıldır?

Ders fotoğrafından | `IMG-20261015-WA0038.jpg`

Adım adım çözüm

1. $\sin t$ işaret değiştirdiğinde mutlak değerin türevi değişir. $t = k\pi$ noktalarında tek taraflı teğet vektörler uyuşmaz; verilen parametrizasyon düzgün değildir.
2. Aradaki açık aralıklarda türev vardır ve normu a olur. Dolayısıyla sonlu sayıda parçaya ayrılarak parçalı düzgün kabul edilir. İz üst yarım çemberdir; birden fazla kez taranır.

Örnek 3.7 | Dersteki temel türevler

$\mathbf{F}(t) = (t, t^2, t^3)$ ve $\mathbf{G}(t) = (t\ln t - t, e^t, e^{-t})$ türevlerini bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261023-WA0058.jpg`

Adım adım çözüm

1. Bileşenler ayrı türevlenir: $\mathbf{F}' = (1, 2t, 3t^2)$.
2. İkinci fonksiyonun ilk bileşeninde çarpım kuralı $(t\ln t - t)' = \ln t + 1 - 1 = \ln t$ verir. $\mathbf{G}' = (\ln t, e^t, -e^{-t})$, $t > 0$.

Örnek 3.8 | Zincir kuralı içeren vektör türevi

$\mathbf{F}(t) = (\arcsin(4t), -3\arctan(2t-1), 7\ln(3t^2))$ türevini bulunuz.

Ders fotoğrafından | IMG-20261023-WA0058.jpg

Adım adım çözüm

1. İlk bileşenin türevi $4/\sqrt{1-16t^2}$; ikincinin türevi $-6/[1+(2t-1)^2]$.
2. Üçüncü bileşen $7(6t)/(3t^2) = 14/t$. Türev formüllerinin ortak geçerlilik aralığı $-1/4 < t < 1/4$, $t \neq 0$. Fonksiyon uçlarda tanımlı olsa da bu türevler uçlarda sonlu değildir.

Örnek 3.9 | Tahtadaki özdeşliğin kanıtı

$[\mathbf{F}(t) \times \mathbf{F}\prime(t)]\prime = \mathbf{F}(t) \times \mathbf{F}\prime\prime(t)$ olduğunu gösteriniz.

Ders fotoğrafından | IMG-20261023-WA0058.jpg

Adım adım çözüm

1. Çarpım kuralı sol tarafı $\mathbf{F}\prime \times \mathbf{F}\prime + \mathbf{F} \times \mathbf{F}\prime\prime$ yapar.
2. Bir vektörün kendisiyle vektörel çarpımı sıfırdır. İlk terim silinince istenen özdeşlik kalır.

Örnek 3.10 | Başlangıç koşullu integral

$\mathbf{r}\prime(t) = (2t, e^{3t}, 4\sin 2t)$, $\mathbf{r}(0) = (2, 1, -2)$. Konumu bulunuz.

Ders fotoğrafından | IMG-20261015-WA0037.jpg

Adım adım çözüm

1. İntegral $\mathbf{r}(t) = (t^2 + C_1, e^{3t}/3 + C_2, -2\cos 2t + C_3)$.
2. Başlangıçtan $C_1 = 2, C_2 = 2/3, C_3 = 0$. Dolayısıyla $\mathbf{r}(t) = (t^2+2, (e^{3t}+2)/3, -2\cos 2t)$.

Örnek 3.11 | Dersteki belirli integral üçlüsü

$\int_0^1 (4t^3, 3, 2(t+1))dt$, $\int_1^2 (6-6t, 3\sqrt{t}, 4/t^2)dt$ ve $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sin t, 1+\cos t, \sec^2 t)dt$ hesaplayınız.

Ders fotoğrafından | IMG-20261023-WA0058.jpg

Adım adım çözüm

1. İlkinde ilkel fonksiyon $(t^4, 3t, t^2+2t)$. Sonuç $(1, 3, 3)$.
2. İkincide ilkel fonksiyon $(6t-3t^2, 2t^{3/2}, -4/t)$. Sonuç $(-3, 4\sqrt{2}-2, 2)$.
3. Üçüncüde sinüs tek fonksiyon olduğundan ilk bileşen 0. İkinci $\pi/2 + \sqrt{2}$, üçüncü $\tan(\pi/4) - \tan(-\pi/4) = 2$.

Örnek 3.12 | Dersteki 5-12-13 helisi

$\mathbf{r}(t) = (5\cos t, 5\sin t, 12t)$, $0 \le t \le 2\pi$, uzunluğunu bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261015-WA0039.jpg`

Adım adım çözüm

1. $\mathbf{r}' = (-5\sin t, 5\cos t, 12)$; norm $\sqrt{25\sin^2 t + 25\cos^2 t + 144} = 13$.
2. $L = \int_0^{2\pi} 13\,dt = 26\pi$. Bu aralıkta $s = 13t$ olduğundan yay parametreli biçim $(5\cos(s/13), 5\sin(s/13), 12s/13)$, $0 \le s \le 26\pi$.

Örnek 3.13 | Çemberin Frenet çatısı

$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ için $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ nedir?

Ders fotoğrafından | `IMG-20261015-WA0034.jpg`

Adım adım çözüm

1. $\mathbf{r}' = (-\sin t, \cos t, 0)$ normu 1 olduğundan $\mathbf{T} = (-\sin t, \cos t, 0)$.
2. $\mathbf{T}' = (-\cos t, -\sin t, 0)$ normu da 1: $\mathbf{N} = (-\cos t, -\sin t, 0)$.
3. Çarpım $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$. Normal merkeze yönelir; binormal sabittir.

Örnek 3.14 | Dersteki uzay eğrisinin Frenet üçlüsü

$\mathbf{r}(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}\,t)$ için $t = 0$ anındaki çatıyı bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261015-WA0040.jpg`

Adım adım çözüm

1. $\mathbf{v}(0) = (1, -1, \sqrt{2})$, normu 2; $\mathbf{a}(0) = (1, 1, 0)$. Dolayısıyla $\mathbf{T}(0) = (1, -1, \sqrt{2})/2$.
2. $\mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{a}(0) = 0$, süratin türevi o anda 0. $\mathbf{T}'(0) = \mathbf{a}(0)/2$; normu $1/\sqrt{2}$. Böylece $\mathbf{N}(0) = (1, 1, 0)/\sqrt{2}$.
3. $\mathbf{B}(0) = (-1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$. Üç vektörün normları 1 ve ikili skaler çarpımları sıfırdır.

Örnek 3.15 | Genel helisin eğriliği

$\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a > 0$, için eğrilik nedir?

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. $\|\mathbf{r}'\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = (ab\sin t, -ab\cos t, a^2)$, normu $a\sqrt{a^2 + b^2}$.
2. $\kappa = a/(a^2 + b^2)$, $\rho = (a^2 + b^2)/a$. $b = 0$ olursa çember sonucu $1/a$ elde edilir.

Örnek 3.16 | Tahtadaki hareket örneği

$\mathbf{r}(t) = (5\cos t, 5\sin t, 6t^2)$. Hız, ivme ve bunların dik olduğu anı bulunuz.

Ders fotoğrafından | IMG-20261015-WA0036.jpg

Adım adım çözüm

1. $\mathbf{v} = (-5\sin t, 5\cos t, 12t)$, $\mathbf{a} = (-5\cos t, -5\sin t, 12)$.
2. $\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = 25\sin t\cos t - 25\sin t\cos t + 144t = 144t$. Yalnızca $t = 0$ anında diktirler.

Örnek 3.17 | Üstel ve trigonometrik hareket

$\mathbf{r}(t) = (e^{-t}, 2\cos 3t, 2\sin 3t)$. $t = 0$ anında hız, ivme büyüklükleri ve birim teğeti bulunuz.

Ders fotoğrafından | IMG-20261015-WA0036.jpg

Adım adım çözüm

1. $\mathbf{v} = (-e^{-t}, -6\sin 3t, 6\cos 3t)$, $\mathbf{a} = (e^{-t}, -18\cos 3t, -18\sin 3t)$.
2. $\mathbf{v}(0) = (-1, 0, 6)$, $\|\mathbf{v}(0)\| = \sqrt{37}$; $\mathbf{a}(0) = (1, -18, 0)$, $\|\mathbf{a}(0)\| = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}$.
3. $\mathbf{T}(0) = (-1, 0, 6)/\sqrt{37}$. Vektörü büyüklüğüyle karıştırmamak için sonucun türünü kontrol et.

Örnek 3.18 | Parametrik eğrinin türü

$\mathbf{r}(t) = (2 + 3t, 4 + 5t, 6 + 4t)$ eğrisinin türünü bulunuz.

Ders fotoğrafından | IMG-20261009-WA0021.jpg

Adım adım çözüm

1. $\mathbf{r}(t) = (2, 4, 6) + t(3, 5, 4)$; sabit doğrultuda bir doğrudur.
2. Simetrik biçim $(x - 2)/3 = (y - 4)/5 = (z - 6)/4$.

Örnek 3.19 | Kapalı eğri ve uç teğetler

$\mathbf{r}(t) = (t^2 - 4, t^3 - 4t, 0)$, $-2 \le t \le 2$. Basit ve kapalı mıdır?

Ders fotoğrafından | IMG-20261009-WA0025.jpg

Adım adım çözüm

1. Her iki uç (0,0,0) olur. Farklı t ve s için eşit ilk koordinatlar s =-t gerektirir; ikinci koordinat eşitliği $2t(t^2 - 4) = 0$ verir.
2. Farklı parametrelerle tek tekrar uçlarda t =2 ve s =-2 dir; t =0 kendi kendine aynı parametredir. Dolayısıyla basit kapalı eğridir.
3. $\mathbf{r}' = (-4, 8, 0)$ ve (4,8,0) uçlarda paralel değildir; kapama noktasında köşe vardır. Verilen parametrizasyon parçalı düzgün kapalı eğri olarak ele alınır.

Örnek 3.20 | Türev ve ikinci türevin noktadaki değeri

$\mathbf{r}(t) = (1 - \cos t, \sin t, t)$ için $t = \pi/2$ anındaki ilk iki türevi bulunuz.

Ders fotoğrafından | IMG-20261009-WA0024.jpg

Adım adım çözüm

1. $\mathbf{r}' = (\sin t, \cos t, 1)$, $\mathbf{r}'' = (\cos t, -\sin t, 0)$.
2. Noktadaki değerler (1,0,1) ve (0,-1,0). Teğet noktası $(1, 1, \pi/2)$, teğet doğrusu bu noktadan (1,0,1) yönünde geçer.

Örnek 3.21 | Vektörel çarpımın türevini iki yoldan almak

$\mathbf{U} = (t, -t, t^2/2)$, $\mathbf{V} = (t^4/4, t^3/3, t^2/2)$. Çarpımın türevini bulunuz.

Ders fotoğrafından | IMG-20261009-WA0024.jpg

Adım adım çözüm

1. Önce çarpım: $\mathbf{U} \times \mathbf{V} = (-t^3/2 - t^5/6, t^6/8 - t^3/2, t^4/3 + t^5/4)$.
2. Türev $(-3t^2/2 - 5t^4/6, 3t^5/4 - 3t^2/2, 4t^3/3 + 5t^4/4)$.
3. Alternatif $\mathbf{U}' \times \mathbf{V} + \mathbf{U} \times \mathbf{V}'$ aynı sonucu verir. Orta bileşenin t altıncı kuvvetinin türevi $6t^5/8 = 3t^5/4$; defterdeki bu satır sadeleştirilerek kontrol edildi.

Örnek 3.22 | Sabit normun türevi

$\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, 0)$, a>0, için hızın konuma dik olduğunu kanıtlayınız.

Ders fotoğrafından | IMG-20261015-WA0036.jpg

Adım adım çözüm

1. $\mathbf{r}' = (-a\sin t, a\cos t, 0)$; konumla çarpım $-a^2 \sin t \cos t + a^2 \sin t \cos t = 0$.
2. Genel gerekçe: $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = a^2$ sabit olduğundan türevi $2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = 0$.

Örnek 3.23 | Dairesel harekette ivme

$\mathbf{r}(t) = (a\cos \omega t, a\sin \omega t, 0)$, $a > 0, \omega \neq 0$ için a_T, a_N nedir?

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. Sürat $a|\omega|$ sabit olduğundan $a_T = 0$. Eğrilik $1/a$.
2. $a_N = (1/a)(a^2\omega^2) = a\omega^2$. İvme tamamen içeriye yönelir; sürat sabit olmasına rağmen sıfır değildir.

4 Çok değişkenli fonksiyonlar, limit ve süreklilik

Örnek 4.1 | Disk ve eğik şerit

$f(x,y)=\sqrt{64-x^2-y^2}$ ve $g(x,y)=\arccos(x-y)$ için tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261015-WA0041.jpg`

Adım adım çözüm

1. İlkinde $x^2+y^2\le 64$: merkezi orijin, yarıçapı 8 olan kapalı disk. Çıktılar $[0,8]$; grafik üst yarım küredir.
2. İkincide $-1\le x-y\le 1$, yani $x-1\le y\le x+1$. Sınır doğruları dahil bir şerit. Görüntü $[0,\pi]$.

Örnek 4.2 | Kök ve logaritmayı birlikte ele almak

$f(x,y)=\sqrt{xy}+\log(1-x^2-y^2)$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261015-WA0042.jpg`

Adım adım çözüm

1. $xy\ge 0$ ve $x^2+y^2<1$ birlikte gerekli.
2. Bölge açık birim diskin birinci ve üçüncü bölgelerde kalan parçaları ile disk içindeki eksen parçalarıdır. Eksenler dahildir; çember dahil değildir.

Örnek 4.3 | İşaret ayırımı gerektiren kök

$f(x,y)=\sqrt{xy-x^4}+xy$ ve $g(x,y)=\sqrt{x^2-y}+x^2+y^2+1$ tanım bölgelerini bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261022-WA0053.jpg`

Adım adım çözüm

1. İlkinde $x(y-x^3)\ge 0$. $x>0$ iken $y\ge x^3$, $x<0$ iken $y\le x^3$; $x=0$ iken her y geçerlidir. Sonuç $\{x>0, y\ge x^3\}\cup\{x<0, y\le x^3\}\cup\{x=0\}$.
2. İkincide $y\le x^2$. Parabol ve altı dahildir. İlk soruda x ile bölmeden önce x işareti ayrılmazsa bölgenin yarısı kaybolur.

Örnek 4.4 | Her yerde tanımlı logaritma

$\ln(x^2+y^2+4)$ için tanım kümesi nedir?

Ders fotoğrafından | `IMG-20261022-WA0053.jpg`

Adım adım çözüm

1. $x^2+y^2+4 \geq 4 > 0$ her noktada doğrudur. Dolayısıyla tanım kümesi $\mathbb{R}^2$.
2. Logaritma artan olduğundan görüntü kümesi $[\ln 4, \infty)$.

Örnek 4.5 | Paraboloidin seviye eğrileri

$f(x,y) = x^2+y^2$ için $c = 0, 1, 4$ seviyelerini bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261015-WA0042.jpg`

Adım adım çözüm

1. $c = 0$ için yalnızca orijin, $c = 1$ için yarıçapı 1 çember, $c = 4$ için yarıçapı 2 çember vardır.
2. $c < 0$ için seviye kümesi boştur. Yüzey $z = x^2+y^2$ yukarı açılan paraboloiddir.

Örnek 4.6 | Polinom limiti

$P(x,y) = 5x^2y^2 + 4xy^3 - 8xy^2 + 3$ için $(x,y) \to (1,2)$ limitini bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261022-WA0053.jpg`

Adım adım çözüm

1. Polinom her yerde süreklidir; limit $P(1,2)$.
2. $5 \cdot 1 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \cdot 8 - 8 \cdot 1 \cdot 4 + 3 = 20 + 32 - 32 + 3 = 23$.

Örnek 4.7 | Dersin kısa limitleri

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (2x^2+y^2+1)/(x^2+y^2+3)$, $\lim_{(x,y)\to(0,\ln 2)} e^{x-y}$, $\lim_{(x,y)\to(1,0)} x \sin y/(x^2+1)$ nedir?

Ders fotoğrafından | `IMG-20261022-WA0053.jpg`

Adım adım çözüm

1. İlk payda 3 olur; limit $1/3$.
2. İkinci ifade süreklidir: $e^{-\ln 2} = 1/2$.
3. Üçüncü payda 2 ve sinüs sıfır olur; limit 0.

Örnek 4.8 | Eşlenikle sadeleştirme

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}[2-\sqrt{xy+4}]/(xy)$ hesaplayınız.

Ders fotoğrafından | IMG-20261022-WA0053.jpg

Adım adım çözüm

1. İfade kendi tanım kümesinde $xy \neq 0$ koşuluyla incelenir. Eşlenikle çarpınca pay $4-(xy+4)=-xy$.
2. Yakında $-1/[2+\sqrt{xy+4}]$ ile aynı olur. Bu sürekli ifadenin limiti $-1/4$. Fonksiyonun eksenlerde tanımsız olması limit almayı engellemez.

Örnek 4.9 | Sinüs içeren limitler

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin(xy)/x$ ve $\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^y \sin x/x$ hesaplayınız.

Ders fotoğrafından | IMG-20261022-WA0056.jpg

Adım adım çözüm

1. İlk ifade, uygun noktalarda $y[\sin(xy)/(xy)]$ olur. Standart $\sin u/u \to 1$ limiti ve $y \to 0$ ile sonuç 0. Doğrudan $|\sin(xy)/x| \leq |y|$ sınırı da aynı sonucu verir.
2. İkincide $e^y \to 1$ ve $\sin x/x \to 1$; sonuç 1. Her iki limitte yaklaşım fonksiyonun tanımlı olduğu noktalar üzerindendir.

Örnek 4.10 | Doğruya bağlı sonuç

$f(x,y)=2xy/(x^2+y^2)$ için orijindeki limiti inceleyiniz.

Ders fotoğrafından | IMG-20261022-WA0058.jpg

Adım adım çözüm

1. $y=0$ yolunda değer 0; $y=x$ yolunda, $x\neq 0$ için değer 1.
2. İki yol aynı noktaya gider fakat sonuçlar farklıdır. Dolayısıyla limit yoktur. Genel $y=mx$ yolunda $2m/(1+m^2)$ çıkar.

Örnek 4.11 | Parabol yoluyla limitin yokluğu

$f(x,y)=(x^4-y^2)/(x^4+y^2)$ için orijindeki limiti inceleyiniz.

Ders fotoğrafından | IMG-20261022-WA0056.jpg

Adım adım çözüm

1. $y=0$ boyunca değer 1; $y=x^2$ boyunca değer 0. İki sonuç farklı, limit yok.
2. Genel $y=ax^2$ yolunda $(1-a^2)/(1+a^2)$ çıkar. Bu örnek, paydadaki dereceleri eşleştirerek uygun yol seçmeyi öğretir.

Örnek 4.12 | İki başka karşı örnek

$(x-y)/(x+y)$, $x/\sqrt{x^2+y^2}$ ve $(x^2+y^2)/y^2$ orijinde limite sahip midir?

Ders fotoğrafından | `IMG-20261022-WA0054.jpg`

Adım adım çözüm

1. İlkinde $y=0$ yolu 1, $x=0$ yolu -1 verir. İkinci ifadede pozitif x ekseni 1, negatif x ekseni -1 verir. İkisinin de limiti yoktur.
2. Üçüncüde y sıfır olamaz; $y=x$ yolunda 2, $y=2x$ yolunda $5/4$ çıkar. Bu limit de yoktur. Tanımsız yolları test yolu olarak seçme.

Örnek 4.13 | Dersteki parçalı fonksiyonun sürekliliği

$f(x,y)=\sin(xy^2)/(x^2+y^2)$ orijin dışında, $f(0,0)=0$ olsun. Her yerde sürekli olduğunu gösteriniz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261022-WA0054.jpg`

Adım adım çözüm

1. Orijin dışında payda sıfır değildir, dolayısıyla süreklidir. Orijinde $|\sin u|\le|u|$ kullanılır.
2. $|f(x,y)|\le|x|y^2/(x^2+y^2)\le|x|\le\sqrt{x^2+y^2}\to 0$. Böylece limit 0 olur ve atanmış değere eşittir.
3. Kutupsal yazım da sınırı $r|\cos\theta|\sin^2\theta\le r$ yapar. Bu tüm açılar için geçerli olduğu için kanıttır.

Örnek 4.14 | Bütün doğruların aynı sonucu vermesi yetmez

$f(x,y)=x^2y/(x^4+y^2)$ orijinde limite sahip midir?

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. $y=mx$ ve sabit $m\neq 0$ için $f=mx/(x^2+m^2)\to 0$. $m=0$ ve dikey eksen de 0 verir.
2. Fakat $y=x^2$ boyunca $f=1/2$. Bu nedenle limit yoktur. Bütün doğruların kontrol edilmesi bile genel limit için yeterli değildir.

5 Kısmi türev, teğet düzlem ve lineer yaklaşım

Örnek 5.1 | Dersteki temel kısmi türev

$f(x,y)=x^2y^3+3x$ için birinci kısmi türevleri bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261022-WA0055.jpg`

Adım adım çözüm

1. x yönünde y sabittir: $f_x=2xy^3+3$. y yönünde x sabittir: $f_y=3x^2y^2$.
2. Örneğin $(1,2)$ noktasında $f_x=19$, $f_y=12$. Bunlar yüzeyin koordinat kesitlerindeki eğimleridir.

Örnek 5.2 | Limit tanımıyla kısmi türev

$f(x,y)=x^2y$ için $f_x(a,b)$ değerini tanımdan bulunuz.

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. $[f(a+h,b)-f(a,b)]/h=[(a+h)^2b-a^2b]/h=2ab+bh$.
2. h sıfıra giderken $f_x(a,b)=2ab$ elde edilir. Bu, diğer değişkeni neden sabit tuttuğumuzu doğrudan gösterir.

Örnek 5.3 | Dersteki rasyonel fonksiyonun ikinci türevleri

$f(x,y)=xy/(x^2+y^2)$, $(x,y)\neq(0,0)$ için ikinci kısmi türevleri bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261022-WA0055.jpg`

Adım adım çözüm

1. $S=x^2+y^2$ kısaltmasıyla bölüm kuralından $f_x=y(y^2-x^2)/S^2$, $f_y=x(x^2-y^2)/S^2$.
2. f_{xx} için $-2xy/S^2-4xy(y^2-x^2)/S^3$ ortak paydada toplanır: $f_{xx}=2xy(x^2-3y^2)/S^3$.
3. Simetriyle $f_{yy}=2xy(y^2-3x^2)/S^3$. Karma türev $f_{xy}=(-x^4+6x^2y^2-y^4)/S^3$.
4. Orijin dışında türevler süreklidir; $f_{yx}=f_{xy}$. Orijinde başlangıç fonksiyonu tanımlı olmadığı için bu formüller orijine uygulanmaz.

Örnek 5.4 | Kısmi türevler var, süreklilik yok

$f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$ orijin dışında, $f(0,0) = 0$ olsun. Orijinde kısmi türevleri ve türevlenebilirliği inceleyiniz.

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. Eksenler boyunca fonksiyon sıfırdır. Bu yüzden $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.
2. $y = x$ boyunca değer $1/2$, dolayısıyla fonksiyon orijinde sürekli değildir. Sürekli olmayan fonksiyon türevlenebilir olamaz.

Örnek 5.5 | Teğet düzlem ve lineer model

$f(x,y) = x^2 + y^2$ için $(1,2,5)$ noktasındaki teğet düzlemi ve normal doğruyu bulunuz.

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. $f_x = 2x, f_y = 2y$. Noktadaki eğimler 2 ve 4. Düzlem $z - 5 = 2(x-1) + 4(y-2)$, yani $z = 2x + 4y - 5$.
2. Normal doğru $(x,y,z) = (1,2,5) + t(-2,-4,1)$. Normalin işaretini ters almak aynı doğruyu verir.

Örnek 5.6 | Dersteki üstel fonksiyonun iki lineerleştirmesi

$f(x,y) = e^{2y-x}$ için $P = (0,0)$ ve $Q = (1,2)$ merkezlerindeki lineerleştirmeleri bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261105-WA0038.jpg`

Adım adım çözüm

1. $f_x = -e^{2y-x}$, $f_y = 2e^{2y-x}$. P merkezinde $L_P = 1 - x + 2y$.
2. Q merkezinde $f = e^3, f_x = -e^3, f_y = 2e^3$. Bu yüzden $L_Q = e^3 - e^3(x-1) + 2e^3(y-2) = e^3(2y - x - 2)$.
3. Her model kendi merkezinin yakınında kullanılır. Örneğin $f(0.01, 0.02) = e^{0.03} \approx 1.03$; bu hedef P merkezine yakındır.

Örnek 5.7 | Karekökün yaklaşık değeri

$\sqrt{(3.01)^2 + (3.98)^2}$ ifadesini diferansiyel veya lineer modelle yaklaşık hesaplayınız.

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, merkez $(3,4)$, $f = 5$. $f_x = 3/5, f_y = 4/5$.
2. $h = 0.01, k = -0.02$. Yaklaşık değer $5 + (3/5)(0.01) + (4/5)(-0.02) = 4.99$.

Örnek 5.8 | Defterdeki hata sınırı

$f = x^2 + 3xy + 2y^2 + 4$, merkez $(2, 1)$, $|x-2|, |y-1| \le 0.01$. Lineerleştirmeyi ve hata sınırını bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261022-WA0060.jpg`

Adım adım çözüm

1. $f(2,1) = 16$, $f_x(2,1) = 7$, $f_y(2,1) = 10$. $L = 16 + 7(x-2) + 10(y-1) = 7x + 10y - 8$.
2. $f_{xx} = 2, f_{xy} = 3, f_{yy} = 4$. M =4 seçilir; hata en fazla $\frac{4}{2}(0.01 + 0.01)^2 = 0.0008$.
3. Kontrol: gerçek kalan $h^2 + 3hk + 2k^2$ olur. Mutlak değer için daha sıkı 0.0006 sınırı da mümkündür; dersteki 0.0008 güvenli ve doğrudur.

Örnek 5.9 | İkinci hata sınırı sorusu

$f = x^2 - 3xy + y^2$, merkez $(1, 2)$, $|x-1|, |y-2| \le 0.1$. L ve güvenli hata sınırını bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261105-WA0038.jpg`

Adım adım çözüm

1. $f(1,2) = -1, f_x = -4, f_y = 1$ olduğundan $L = -1 - 4(x-1) + (y-2) = -4x + y + 1$.
2. İkinci türevlerin mutlak değerleri 2,3,2; M =3. Hata $\le (3/2)(0.1 + 0.1)^2 = 0.06$.

Örnek 5.10 | Küçük bölgede kosinüs hatası

$f(x, y) = 1 + x + \cos y$, merkez $(0, 0)$, $|x|, |y| \le 0.2$. L ve hata sınırını bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261105-WA0040.jpg`

Adım adım çözüm

1. $f(0,0) = 2, f_x = 1, f_y(0,0) = 0$. Böylece $L = 2 + x$.
2. $f_{xx} = f_{xy} = 0, |f_{yy}| = |\cos y| \le 1$. Genel sınır 0.08 verir; yalnız y yönündeki gerçek ikinci terim kullanılırsa $|f - L| = |\cos y - 1| \le y^2/2 \le 0.02$.

Örnek 5.11 | Tahtadaki silindir hacmi değişimi

Yarıçapı 3 cm, yüksekliği 10 cm olan silindirde yarıçap 0.01 cm artsın, yükseklik 0.1 cm azalsın. Hacim değişimini yaklaşık bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261108-WA0066.jpg`

Adım adım çözüm

1. $V = \pi r^2 h$; $dV = 2\pi r h\, dr + \pi r^2\, dh$. $dr = 0.01, dh = -0.1$.
2. $dV = 60\pi(0.01) + 9\pi(-0.1) = -0.3\pi$ santimetre küp. Başlangıç hacmi 90π, yeni hacim yaklaşık 89.7π.
3. Tam değer $\pi(3.01)^2(9.9) = 89.69499\pi$. Yaklaşık ve tam değer arasındaki fark 0.00501π;

yüksek mertebeli terimlerden gelir.

Örnek 5.12 | Silindir için ikinci ders sorusu

Yarıçap 10 cm den 9.9 cm ye, yükseklik 30 cm den 30.3 cm ye değişiyor. Yaklaşık hacim değişimi nedir?

Ders fotoğrafından | `IMG-20261108-WA0083.jpg`

Adım adım çözüm

1. $dr = -0.1, dh = 0.3$. $dV = 2\pi(10)(30)(-0.1) + \pi(100)(0.3) = -30\pi$ santimetre küp.
2. Başlangıç hacmi 3000π, yeni hacim yaklaşık 2970π. İşaret hacmin azaldığını gösterir.

Örnek 5.13 | Tahtadaki polinom diferansiyeli

$f = x^3 + 5xy^2 + 3xy + 4x - 3y + 5$ için df ve ikinci diferansiyeli yazınız.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261108-WA0082.jpg`

Adım adım çözüm

1. $f_x = 3x^2 + 5y^2 + 3y + 4$, $f_y = 10xy + 3x - 3$. df bu katsayılarla dx ve dy nin toplamıdır.
2. $f_{xx} = 6x, f_{xy} = 10y + 3, f_{yy} = 10x$. Dolayısıyla $d^2f = 6x\,dx^2 + 2(10y + 3)dx\,dy + 10x\,dy^2$.

Örnek 5.14 | Üç değişkenli polinomun diferansiyelleri

$w = 3x^2yz^2 - 3xy + 2yz^2 + xyz$ için birinci ve ikinci diferansiyeli bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261108-WA0082.jpg`

Adım adım çözüm

1. $w_x = 6xyz^2 - 3y + yz$, $w_y = 3x^2z^2 - 3x + 2z^2 + xz$, $w_z = 6x^2yz + 4yz + xy$. $dw = w_x dx + w_y dy + w_z dz$.
2. $w_{xx} = 6yz^2, w_{yy} = 0, w_{zz} = 6x^2y + 4y$. Karma türevler $w_{xy} = 6xz^2 - 3 + z$, $w_{xz} = 12xyz + y$, $w_{yz} = 6x^2z + 4z + x$.
3. İkinci diferansiyel bu altı katsayı yukarıdaki genel formüle yerleştirilerek elde edilir. Her karma terimin katsayısı 2 ile çarpılır.

6 Zincir kuralı, yönlü türev ve gradyan

Örnek 6.1 | Tahtadaki trigonometrik zincir örneği

$z = x^2 + y^2$, $x = \cos t + \sin t$, $y = \cos t - \sin t$. dz/dt nedir?

Ders fotoğrafından | `IMG-20261105-WA0041.jpg`

Adım adım çözüm

1. $z_x = 2x, z_y = 2y$; $x\prime = -\sin t + \cos t$, $y\prime = -\sin t - \cos t$. Zincir toplamı 0 olur.
2. Doğrudan kontrol: $(\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2 = 2$. Sabit fonksiyonun türevi 0.

Örnek 6.2 | Çarpanlı fonksiyonda zincir kuralı

$z = xy$, $x = \cos t, y = \sin t$. dz/dt yi bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261105-WA0041.jpg`

Adım adım çözüm

1. $z_x = y, z_y = x$. Böylece $z\prime = \sin t(-\sin t) + \cos t \cos t = \cos^2 t - \sin^2 t$.
2. Doğrudan $z = \frac{1}{2}\sin 2t$ türevi de $\cos 2t$, aynı sonuçtur.

Örnek 6.3 | Tahtadaki logaritma örneği

$z = \ln(x^2 + y^2)$, $x = e^u \cos v, y = e^u \sin v$. z_u, z_v nedir?

Ders fotoğrafından | `IMG-20261108-WA0074.jpg`

Adım adım çözüm

1. $f_x = 2x/(x^2 + y^2)$, $f_y = 2y/(x^2 + y^2)$. $x_u = x, y_u = y, x_v = -y, y_v = x$.
2. $z_u = 2(x^2 + y^2)/(x^2 + y^2) = 2$; $z_v = (-2xy + 2xy)/(x^2 + y^2) = 0$.
3. Kontrol: $x^2 + y^2 = e^{2u}$, dolayısıyla $z = 2u$.

Örnek 6.4 | Üç ara değişkenli ders örneği

$S = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $x = u + v, y = u - v, z = 2\sqrt{uv}$. Pozitif u ve v için S_u, S_v bulunuz.

Ders fotoğrafından | `IMG-20261108-WA0077.jpg`

Adım adım çözüm

1. $x_u = x_v = 1, y_u = 1, y_v = -1, z_u = v/\sqrt{uv}, z_v = u/\sqrt{uv}$.
2. Payda $x^2 + y^2 + z^2 = 2(u + v)^2$. Zincir toplamları $S_u = S_v = 2/(u + v)$.
3. Doğrudan $S = \ln 2 + 2\ln(u + v)$ aynı sonucu verir. $u, v > 0$ seçimi kökün içte türevlenmesini ve logaritmanın tanımını güvenceye alır.

Örnek 6.5 | İki bağımsız yeni değişkenle karmaşık örnek

$z = e^{x/y}$, $x = \sin u, y = u^2 v$, $u, v \neq 0$. z_u, z_v yi bulunuz.

Ders fotoğrafından | IMG-20261108-WA0079.jpg

Adım adım çözüm

1. $f_x = e^{x/y}/y$, $f_y = -xe^{x/y}/y^2$. $x_u = \cos u, x_v = 0, y_u = 2uv, y_v = u^2$.
2. $z_u = e^{\sin u/(u^2 v)}[\cos u/(u^2 v) - 2\sin u/(u^3 v)]$.
3. $z_v = -e^{\sin u/(u^2 v)} \sin u/(u^2 v^2)$. İç ifadeyi önce sadeleştirip türev almak da kontrol yöntemidir.

Örnek 6.6 | Tahtadaki kapalı türev sorusu

$2x^4 z^3 + 3xy^2 + 4xz + 3y + 5x - 23 = 0$ denkleminin tanımladığı z(x,y) için $(1, 2)$ noktasında z_x, z_y nedir?

Ders fotoğrafından | IMG-20261108-WA0081.jpg

Adım adım çözüm

1. Önce z bulunur: $2z^3 + 4z = 0$. Gerçek çözüm $z = 0$; inceleme noktası $(1, 2, 0)$.
2. $F_x = 8x^3 z^3 + 3y^2 + 4z + 5$, $F_y = 6xy + 3$, $F_z = 6x^4 z^2 + 4x$.
3. Noktada $F_x = 17, F_y = 15, F_z = 4 \neq 0$. Böylece $z_x = -17/4, z_y = -15/4$. Yerel z(x,y) yorumu geçerlidir.

Örnek 6.7 | Kapalı denklemin teğet düzlemi

$x^2 + y^2 + z^2 = 9$ küresinin $(1, 2, 2)$ noktasındaki teğet düzlemi nedir?

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. $F = x^2 + y^2 + z^2 - 9$, gradyanı $(2x, 2y, 2z)$. Noktada normal $(2, 4, 4)$.
2. $2(x-1) + 4(y-2) + 4(z-2) = 0$, yani $x + 2y + 2z = 9$. Bu normal merkezden noktaya giden yarıçapla paraleldir.

Örnek 6.8 | Dersteki diferansiyel denklem dönüşümü

$x = e^t$ dönüşümü altında $x^2 y_{xx} + xy_x - y = 0$ denklemini t değişkenine dönüştürünüz.

Ders fotoğrafından | IMG-20261105-WA0042.jpg

Adım adım çözüm

1. $dt/dx = 1/x$. Dolayısıyla $y_x = y_t/x$.
2. Yeniden x türevi: $y_{xx} = (y_{tt} - y_t)/x^2$. Burada hem y_t hem $1/x$ türevlenir.

3. Denklem $(y_{tt} - y_t) + y_t - y = 0$, yani $y_{tt} - y = 0$ olur. Dönüşüm $x > 0$ için geçerlidir.

Örnek 6.9 | Birim olmayan yönden yönlü türev

$f(x, y) = x^2y + 3y$, $P = (1, 2)$, yön $\mathbf{v} = (3, 4)$. Yönlü türev nedir?

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. $f_x = 2xy, f_y = x^2 + 3$. $\nabla f(1, 2) = (4, 4)$.
2. Yönün normu 5; $\mathbf{u} = (3/5, 4/5)$. $D_{\mathbf{u}}f = 4(3/5) + 4(4/5) = 28/5$.
3. Birimleştirmeden alınan 28 sonucu, parametre hızını 5 katına çıkarır ve bu sorunun istediği birim uzunluk başına türev değildir.

Örnek 6.10 | P den Q ya doğru değişim

$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $P = (1, 0, 2)$, $Q = (3, 1, 4)$. P de Q yönündeki türev nedir?

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. $Q - P = (2, 1, 2)$, norm 3; birim yön $(2, 1, 2)/3$. $\nabla F(P) = (2, 0, 4)$.
2. Skaler çarpım $(4+0+8)/3 = 4$. Sonucun pozitif olması bu yönde ilk anda alan değerinin arttığını gösterir.

Örnek 6.11 | Gradyanla yön seçmek

$f = x^2 + 2y^2$ için P =(1,1) noktasında en hızlı artış yönü, hızı ve sıfır değişim yönü nedir?

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. $\nabla f = (2x, 4y)$; P de $(2, 4)$, norm $2\sqrt{5}$. En hızlı artış birim yönü $(1, 2)/\sqrt{5}$, hızı $2\sqrt{5}$.
2. En hızlı azalış ters yönde ve türev $-2\sqrt{5}$. Sıfır türev yönlerinden biri $(-2, 1)/\sqrt{5}$, çünkü $(2, 4) \cdot (-2, 1) = 0$.

Örnek 6.12 | Seviye eğrisinin teğet doğrusu

$x^2 + 2y^2 = 3$ eğrisinin (1,1) noktasındaki teğeti nedir?

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. Gradyan $(2, 4)$ teğete normaldir. $2(x - 1) + 4(y - 1) = 0$, yani $x + 2y = 3$.
2. Bu doğrultu önceki örnekteki sıfır yönlü türev doğrultusuyla aynıdır. Teğet doğrusu eğriye yalnızca yerel olarak yaklaşır.

Örnek 6.13 | Birleşik pekiştirme

$f(x,y) = e^{x-y}$, P =(0,0). P de teğet düzlem, $(1,1)$ yönünde türev ve en hızlı artış yönünü bulunuz.

Pekiştirme

Adım adım çözüm

1. $f(P) = 1, \nabla f(P) = (1,-1)$. Grafik üzerindeki teğet düzlem $z = 1 + x - y$.
2. Birim yön $(1,1)/\sqrt{2}$; yönlü türev 0. En hızlı artış yönü $(1,-1)/\sqrt{2}$, artış hızı $\sqrt{2}$.
3. $x = y$ doğrusu üzerinde fonksiyon gerçekten 1 dir. Bu örnekte sıfır türev sabit seviye doğrultusuna karşılık gelir; her fonksiyonda böyle küresel bir sonuç çıkarılmaz.

Kaynaklar ve kapsam

Bu metin 156 ders/defter fotoğrafı ve altı başlıklı müfredata göre özgün olarak yazıldı. Fotoğraflar dersin sıra ve örneklerini belirler. Ek sorular pekiştirme olarak etiketlidir; çıkmış sınav sorusu iddiası yoktur. Soluk semboller tahminle aktarılmadı. Gradyan ve yönlü türev, müfredat gereği tamamlanan anlatımdır. Fotoğraf bazında inceleme dizini web sitesinde ve analysis/FOTOGRAF_INCELEMESI.md dosyasında bulunur. **Birincil ders malzemesi**. Kullanıcının sağladığı 156 JPG ders/defter fotoğrafı ve mufredat.png. Dosya tarihleri ders tarihi olarak varsayılmadı. Konu-fotoğraf eşleştirmesi fotoğraf dizinindedir.

Erwin Kreyszig · Advanced Engineering Mathematics. Dersin belirtilen kitabı. Wiley 10. baskı bölüm diziniyle vektör diferansiyel hesabı başlığı eşleştirildi; tam kitap dosyası sağlanmadı. Kitaptan birebir metin veya soru aktarımı yapılmadı. `https://bcs.wiley.com/he-bcs/Books?action=contents&bcsId=6140&itemId=0470458364`

KOCW · Kreyszig temelli Bölüm 9 ders notları. Sungkyunkwan / Kim Munhyeon, vektörler ve vektör fonksiyonları. Açık üniversite notu kavram ve formül kontrolünde kullanıldı. Buradaki Türkçe açıklamalar ve çözümler özgün olarak yazıldı. `https://contents.kocw.net/KOCW/document/2015/sungkyunkwan/kimmunhyeon3/8.pdf`

Zill ve Wright · Calculus / Matematik. Kullanıcının verdiği bibliyografya: İ. N. Cangül çevirisi, Nobel, 2013. Tam metne erişilmedi; baskıya özgü sayfa ve soru numarası atfedilmedi.

Mustafa Balcı · Genel Matematik II. Kullanıcının verdiği bibliyografya: Sürat, 2013. Tam metin sağlanmadı; bu kitaptan doğrulanmış alıntı veya sayfa atfı yapılmadı.

MIT OCW · 18.02 ders notları. Denis Auroux, 2007. Ders düzeni ve kavram denetimi için açık ders dizini. Müfredat dışındaki çok katlı integraller ve integral teoremleri bu çalışmaya eklenmedi. `https://ocw.mit.edu/courses/18-02-multivariable-calculus-fall-2007/pages/lecture-notes/`

MIT · Teğet düzlem ve gradyan. Gradyanın teğet düzlem ve yönlü türevle ilişkisi için açık teknik kontrol kaynağı. Konuya eklenen örnekler özgün pekiştirme sorularıdır. `https://www.ocw.mit.edu/ans7870/18/18.013a/textbook/HTML/chapter06/section05.html`